第一章 行列式

行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (二阶)　　a_{ij}（第几行、第几列）

求行列式值的方法：1. 对角线法则（仅用于二、三阶行列式）：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

主对角线 − 副对角线

2. 定义法：$D=\sum (-1)^{\underbrace{N(i_1i_2\cdots i_n)}_{\text{行下标的逆序数}}+\underbrace{N(j_1j_2\cdots j_n)}_{\text{列}\sim}} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$

☆☆☆ 3. 化三角行列式法：（下三角）（上三角）；（把行列式化为三角行列式计算）

☆☆☆ 运用性质：① 转置：$D=D^T$　D不变

② 互换两行(列)：$D \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} -D$，$D \xlongequal{c_i \leftrightarrow c_j} -D$　变号

③ 两行(列)相同：$D=0$

④ 某行(列)乘k倍：$D_1 \xlongequal{r_i \times k} \boxed{\frac{1}{k}} D_2$．　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \times k} \frac{1}{k}\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

推论：$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \div k} \boxed{k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

⑤ 两行(列)成比例：$D=0$

⑥ $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+b_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+b_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+b_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

⑦ 把第j行(列)×k加到第i行(列)上：r_i+kr_j，c_i+kc_j　D不变

☆☆ 4. 行列式按行(列)展开：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$　$\boxed{\text{余子式}}$：$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$（去掉红线上的元素只留余下部分），$\boxed{\text{代数余子式}}$：$A_{23}=(-1)^{\overset{\text{行标+列标}}{2+3}} \times M_{23} = -M_{23}$．

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\times M_{ij}$　余子式乘符号

用法：$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

通常用于某行(列)只有一个元素非零的情况

4. （按第2列展开）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$

$=-a_{12}M_{12}+a_{22}M_{22}-a_{32}M_{32}$

$=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

☆ 定理：$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=0$．（一行元素分别乘另一行元素对应的代数余子式值为0）

☆ 5. 克拉默法则：用于求有n条n个系数（n阶D≠0）的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

非齐次：$b_1\sim b_n$不全为0 → 唯一解．

齐次：$b_1\sim b_n$全为0 → $\begin{cases} D\neq 0，x_i=0\ (i=1,\cdots,n) \text{ 仅0解} \\ D=0，\text{有非零解 见第4、5章} \end{cases}$

解法：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$　$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$（用$b_1\sim b_n$替换第j列）

$x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$，…，$x_n=\frac{D_n}{D}$