

广东海洋大学 2017 —— 2018 学年第 一 学期

《高等数学 III》课程试题

课程号：

☒ 考试
☐ 考查

☐ A 卷
☒ B 卷

☒ 闭卷
☐ 开卷

题 号	一	二	三	四	五	总分	阅卷教师
各题分数							
实得分数							

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$ 。

解：因为 $\tan 2x \sim 2x$ ， $\sin 3x \sim 3x$ ($x \rightarrow 0$)，所以利用无穷小替换定理，可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} a, & x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则常数 $a = 1$ 。

解：函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续 $\Leftrightarrow f(0 - 0) = f(0) = f(0 + 0)$ ，故有

$$1 = f(0) = f(0 - 0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a$$

3. 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在 $x = 2$ 处的切线方程为 $y = -\frac{1}{4}x + 1$ 。

解：当 $x = 2$ 时， $y = \frac{1}{2}$ 。曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率为

$$k = f'(2) = \left(\frac{1}{x}\right)' \bigg|_{x=2} = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \bigg|_{x=2} = -\frac{1}{4},$$

所以由直线的点斜式方程可得切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2),$$

即
$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

4. 设参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^2 + t^3 \end{cases}$ ，则 $\frac{dy}{dx} = (2+3t)(1+t)$ 。

解：由参数方程确定的函数的导数公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

得
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t + 3t^2}{1 - \frac{1}{1+t}} = \frac{(2t + 3t^2)(1+t)}{t} = (2+3t)(1+t)$$

5. 函数 $y = \sin(x^2)$ ，则 $dy = 2x \cos(x^2)dx$ 。

解：由微分与导数的关系 $dy = f'(x)dx$ 可得

$$dy = \left(\sin(x^2)\right)' dx = 2x \cos(x^2)dx.$$

或者利用一阶微分形式的不变性得

$$dy = d\sin(x^2) = \cos(x^2)d(x^2) = 2x \cos(x^2)dx.$$

$$6. \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^2} \mathrm{d}t = 2x\sqrt{1+x^4}.$$

解：利用积分上限函数的导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^{\varphi(x)} f(t) \mathrm{d}t = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

$$\text{可得} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^2} \mathrm{d}t = 2x\sqrt{1+x^4}$$

二、计算题（每小题 6 分,共 36 分）

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

解：这是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式极限，故可用洛比达法则计算。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x^2 - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{2x} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{2}{x}}$$

解：利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow X} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ ，（其中 $\alpha \rightarrow 0, \alpha \neq 0, x \rightarrow X$ 。）

可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (-4x))^{\frac{1}{-4x}} \right]^{-8} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-4x))^{\frac{1}{-4x}} \right]^{-8} = e^{-8}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

解: $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ 属 $\infty - \infty$ 型未定式, 故应先对其进行化简。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x)}{x^2 \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x)}{x^3} \quad (\text{等价无穷替换 } \sin x \sim x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \quad (\text{利用洛比达法则}) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} \quad (\text{等价无穷小替换}) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4. $\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

解: 这是简单无理函数的积分, 宜将被积函数中的根式进行变量替换。

作变换: $t = \sqrt{x+1}$, 则 $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$, 当 $x = 3$ 时, $t = 2$, 当 $x = 8$ 时, $t = 3$, 故由定积分的换元法得

$$\begin{aligned}
\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int_2^3 \frac{2}{t^2-1} dt \\
&= \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 \\
&= \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \\
&= \ln \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

5. $\int x e^{-x} dx$.

解：利用分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

得

$$\begin{aligned}
\int x e^{-x} dx &= \int x d(-e^{-x}) \\
&= x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx \\
&= x(-e^{-x}) - \int e^{-x} d(-x) \\
&= x(-e^{-x}) - e^{-x} + C \\
&= -e^{-x}(x+1) + C
\end{aligned}$$

6. $\int_{-2}^2 (x^5 \cos x - 5 \sin^3 x + 1) dx$

解：积分区间为关于原点对称的区间，故利用被积函数的奇偶性可得

$$\int_{-2}^2 x^5 \cos x dx = 0, \quad (x^5 \cos x \text{ 为 } [-2, 2] \text{ 上奇函数})$$

$$\int_{-2}^2 5 \sin^3 x dx = 0, \quad (5 \sin^3 x \text{ 为 } [-2, 2] \text{ 上奇函数})$$

所以有

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^5 \cos x - 5 \sin^3 x + 1) dx &= \int_{-2}^2 x^5 \cos x dx - \int_{-2}^2 5 \sin^3 x dx + \int_{-2}^2 dx \\ &= 0 - 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

三、证明：应用拉格朗日定理，证明方程 $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$

在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根。（6 分）

证：考虑函数 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x$ ，显然， $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，故由拉格朗日定理可知，至少存在一个 $\xi \in (0, 1)$ ，使得

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)(1 - 0),$$

$$\text{即} \quad 0 = f(1) - f(0) = 4a\xi^3 + 3b\xi^2 + 2c\xi - (a + b + c),$$

$$\text{故有} \quad 4a\xi^3 + 3b\xi^2 + 2c\xi = (a + b + c)$$

这表明， $\xi \in (0, 1)$ 是方程 $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ 的一个根，故结论成立。

四、综合题（每小题 10 分，4 题共 40 分）.

1. 求函数 $f(x) = 3x - x^3$ 的单调区间、极值、凹凸区间和拐点。

解：函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

$$f'(x) = 3 - 3x^2,$$

令 $f'(x) = 0$ 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ 。

列表讨论函数的单调区间和极值：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
$y=f(x)$	$\searrow$	极小值点 极小值 $f(-1)$	$\nearrow$	极大值点 极大值 $f(1)$	$\searrow$

所以函数的单调减区间为 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, 单调增区间为 $(-1, 1)$ 。

极小值为 $f(-1) = -4$, 极大值为 $f(1) = 2$ 。

$$f''(x) = -6x$$

令 $f''(x) = 0$, 解得 $x_3 = 0$ 。

列表讨论函数的凹凸区间和拐点：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	$+$	0	$-$
$y=f(x)$	$\cup$	拐 点 $(0, f(0))$	$\cap$

所以函数的凹区间为 $(-\infty, 0)$, 凸区间为 $(0, +\infty)$, 拐点为

$(0, f(0)) = (0, 0)$ 。

2. 设函数 $Z(x, y) = \ln(x + y^2)$, 求二阶偏导数 $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ 。

$$\text{解: } \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\ln(x + y^2)) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} (x + y^2)}{x + y^2} = \frac{1}{x + y^2},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(x + y^2)) = \frac{\frac{\partial}{\partial y} (x + y^2)}{x + y^2} = \frac{2y}{x + y^2}$$

(以上求偏导用的是一元函数的对数函数求导公式和复合函数链式法则。)

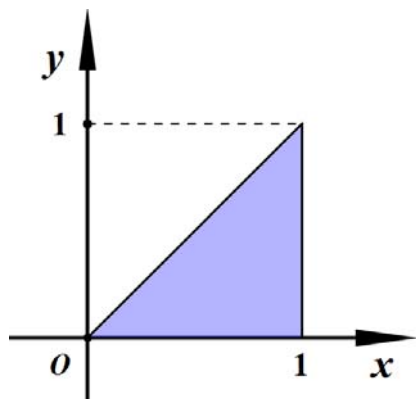
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x+y^2} \right) = \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)}{(x+y^2)^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x+y^2} \right) = \frac{-\frac{\partial}{\partial y}(x+y^2)}{(x+y^2)^2} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{x+y^2} \right) = \frac{2(x+y^2) - 2y \frac{\partial}{\partial y}(x+y^2)}{(x+y^2)^2} \\ &= \frac{2(x+y^2) - 4y^2}{(x+y^2)^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2} \end{aligned}$$

3. 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$, 其中 D 是 $x=1, y=x$ 及 x 轴所围成

的区域。



解：把 D 分别表示成 X -型区域

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x,$$

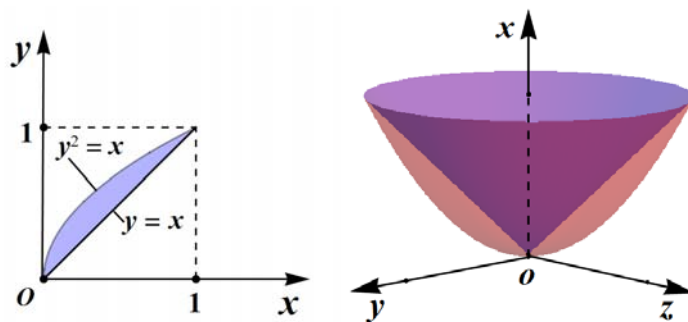
则有

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \\
&= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x dy \\
&= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot x dx \\
&= \int_0^1 \sin x dx \\
&= -\cos x \Big|_0^1 \\
&= 1 - \cos 1
\end{aligned}$$

4. 已知平面图形 D 由曲线 $y^2 = x$ 与直线 $x = 1$ 所围成。

(1) 求该平面图形 D 的面积 S ；(5 分)

(2) 求该平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的立体的体积 V 。(5 分)



解：(1) 平面区域 D 的面积为

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx \\
&= \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} x^{1 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right) \bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(2) 平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的立体的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi (\sqrt{x})^2 dx - \int_0^1 \pi (x)^2 dx \\
&= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^2 dx \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$