补充：等差数列求和: $a_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

等比数列求和: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

第一章 T1(1), T2, T3, T4, T6, T7, T8(1)(3), T12

T1(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times2\times5 + 0\times(-1)\times2 + 0\times3\times(-2) - (-2)\times2\times2 - (-1)\times3\times1 - 0\times0\times5$

$= 10 + 8 + 3 = 21$

T2 (1) 3421: $\tau(3421) = 2+2+1 = 5$

(2) $n(n-1)\cdots21$: $\tau(n(n-1)\cdots21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{(n-1)n}{2}$

T3 含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项(四阶)

注意,项要带符号

$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{14}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & a_{23} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

剩下4个元素组合即可

有: $-\underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}}_{(-1)^{\tau(1324)} = (-1)^1 = -1}$, $+\underbrace{a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}}_{(-1)^{\tau(1342)} = (-1)^{1+1} = 1}$

+可不写

T4 $|a_{ij}| = D$ (5阶): $r_1 \leftrightarrow r_4$, D^T, $2\times r_1$、$2\times r_2$、$2\times r_3$、$2\times r_4$、$2\times r_5$, $C_5 - 1\times C_2$

变号 不变 乘上 2^5 不变

$\therefore$ 结果为 $-2^5 D = -32D$

6. $a_{31}=-2$, $a_{32}=-1$, $a_{33}=0$, $a_{34}=1$, $M_{31}=-5$, $M_{32}=-3$, $M_{33}=7$, $M_{34}=4$

解: $D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$

$= a_{31}(-1)^{3+1}M_{31} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} + a_{33}(-1)^{3+3}M_{33} + a_{34}(-1)^{3+4}M_{34}$

$= (-2)\times(-5) - (-1)\times(-3) + 0\times7 - 1\times4$

$= 10 - 3 - 4$

$= 3$

T7(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\underbrace{\tau(4321)}_{3+2+1=6}} 1\times1\times(-2)\times(-4) = 8$

T8(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\underbrace{\tau(234\cdots(n-1)1)}_{=1+1+\cdots+0=n-1}} \underbrace{1\times2\times\cdots\times n}_{n!} = (-1)^{(n-1)} n!$

注: $n-1$ 和 $n+1$ 奇偶性相同

$n-1$: 数每个数后比它小的数的总和

$n+1$: 用书上方式数为 $n+1$

} 用哪种都行,会1个就行

(3) $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_4+r_1 \\ \vdots \\ r_n+r_1}]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^{(n-1)}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a+b+c \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = a^2+b^2+c^2 \\ bcx_1 + cax_2 + abx_3 = 3abc \end{cases}$

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-bcr_1]{r_2-ar_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)b + (a-c)(a-b)c$

$= (a-c)(b^2-ab+ac-bc)$ 算完发现用不上，无所谓，大胆试

$D_1 = \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 1 \\ a^2+b^2+c^2 & b & c \\ 3abc & ca & ab \end{vmatrix} \xlongequal[c_1-cc_3]{c_1-bc_2} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a^2 & b & c \\ abc & ca & ab \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \div a} a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & 1 \\ a & a^2+b^2+c^2 & c \\ bc & 3abc & ab \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2-cc_3 \\ c_2 \div b}]{c_2-ac_1} b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+b+c \\ a & b & a^2+b^2+c^2 \\ bc & ac & 3abc \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_3-bc_2 \\ c_3 \div c}]{c_3-ac_1} c\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$

D_1, D_2, D_3都和D成比例，省掉计算了。

$\therefore \ x_1 = \dfrac{D_1}{D} = a, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = b, \quad x_3 = \dfrac{D_3}{D} = c$

第二章 T1, 3, 7, 8, ~~15~~, 17, 21, 22

T1 $A=\begin{pmatrix}-3&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&3&2\end{pmatrix}$

(1) 求 $A+B=\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&4&4\end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix}-1&2&2\\4&-2&0\end{pmatrix}$

$3A-2B=\begin{pmatrix}-9&6&9\\9&3&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&0&2\\-2&6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6&7\\11&-3&2\end{pmatrix}$

(2) $A+Z=B$, $Z=B-A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-4&2&0\end{pmatrix}$

(3) $3A+Y+3(B-Y)=0$

$3A+Y+3B-3Y=0$

$Y=\frac{3}{2}(A+B)=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{15}{2}&3&6\\3&6&6\end{pmatrix}$

T3 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&7\\5&8\\6&9\end{pmatrix}$

(1) $AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&7\\5&8\\6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+10+18&7+16+27\\12+5+12&21+8+18\\8+15+6&14+24+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&50\\29&47\\29&47\end{pmatrix}$

(2) $3AB=3\begin{pmatrix}32&50\\29&47\\29&47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times32&3\times50\\3\times29&3\times47\\3\times29&3\times47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96&150\\87&141\\87&141\end{pmatrix}$

注意： k乘 $\begin{cases}\text{行列式：乘某行或列}\\\text{矩阵：乘所有元素}\end{cases}$

T7 分析: I, II, III, IV为工厂，ABC为产品，求总投入和利润，实际为每厂各产品产量×利润的总和，对应到矩阵乘法。

厂名	价格	利润
I	$5\times4+10\times5+20\times4.5$	$5\times1+10\times2+20\times1.5$
II	$6\times4+15\times5+10\times4.5$	$6\times1+15\times2+10\times1.5$
III	$4\times4+20\times5+8\times4.5$	$4\times1+20\times2+8\times1.5$
IV	$8\times4+12\times5+6\times4.5$	$8\times1+12\times2+6\times1.5$

$=\begin{pmatrix}160&55\\144&51\\152&56\\119&41\end{pmatrix}$ (万元)

8. $AX=B$, 求 X, $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\8&3\end{pmatrix}$ 根据A的行数，B的列数 可确定X为2行2列，可以直接求，用逆求 或作变换求，这里只列一种

$AX=B$

$\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\div(-3)]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right)$

$X=A^{-1}B$, $\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

注：省略步骤特别容易算错，记得检查!!!

$X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\8&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}+\frac{16}{3}&-1+2\\\frac{8}{3}-\frac{8}{3}&2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\0&1\end{pmatrix}$

T15 (1) $A^T-3B^T=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&7\\2&2&8\\3&6&3\end{pmatrix}$

(2) $(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\6&12&18\end{pmatrix}$

T17 $A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$ $(\lambda\neq0)$，求 A^k

解：看是看不明白的，先算几步试试。

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda+\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda+\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}$ 好像发现规律了，大胆写结论

$\vdots$

$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$

T_{21}. $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} (定义法)

根据定义：$AB = BA = E$

设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\therefore AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{11}+9a_{21} & 3a_{12}+9a_{22} \\ -2a_{11}-5a_{21} & -2a_{12}-5a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a_{11}+9a_{21}=1 \\ 3a_{12}+9a_{22}=0 \\ -2a_{11}-5a_{21}=0 \\ -2a_{12}-5a_{22}=1 \end{cases}$

$A^{-1}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{11}-2a_{12} & 9a_{11}-5a_{12} \\ 3a_{21}-2a_{22} & 9a_{21}-5a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3a_{11}-2a_{12}=1 \\ 3a_{21}-2a_{22}=0 \\ 9a_{11}-5a_{12}=0 \\ 9a_{21}-5a_{22}=1 \end{cases}$

不喜欢解方程的可以偷偷草稿纸用其它方法算完套进去

所以解得 $a_{11} = -\frac{5}{3}$，$a_{12} = -\frac{9}{3}$，$a_{21} = \frac{2}{3}$，$a_{22} = 1$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

T_{22} $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} (公式法) $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

此方法 ① 求 $|A|$，即A变为行列式时的值，不为0才能求

② 求所有的代数余子式

③ 将代数余子式的结果按下标转置后的位置塞回去 (伴随矩阵)

① $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -5\times 3 + 2\times 9 = 18-15 = 3 \neq 0$

② $A_{11} = -5$ $A_{12} = -(-2) = 2$

$A_{21} = -9$ $A_{22} = 3$

③ $A^* = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

④ $A^{-1} = \frac{1}{3}A^* = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -3 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

第三章

T1. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&1&\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2-\frac{5}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

验证一下：$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$

T2 $A=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-3r_1\\r_3-r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div 4]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&\frac{5}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 行阶梯形

$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&\frac{5}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 行最简形

T7 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$ (1) $R(A)=1$? (2) $R(A)=2$? (3) $R(A)=3$?

先化简观察：$\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&2(k-1)&\underbrace{3(1-k^2)}_{3(1-k)(1+k)}\end{pmatrix}$

$\therefore$ 当 $k=1$ 时 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$R(A)=1$

$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&0&-3(k-1)(k+2)\end{pmatrix}$

$\therefore$ 当 $k=-2$ 时，$R(A)=2$

当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时，$R(A)=3$

T9 (1) $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=4\\x_1+3x_2-3x_3=-2\\-2x_1+3x_2-2x_3=-3\end{cases}$

化行最简形即可

解：$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&1&4\\1&3&-3&-2\\-2&3&-2&-3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-3r_1\\r_2\div 10\\r_3+2r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-3&-2\\0&-1&1&1\\0&9&-8&-7\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+9r_2\\r_2\times(-1)}]{r_1+3r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{array}\right)$

$\therefore$ 解得 $x_1=x_2=1,\ x_3=2$

T_{10}(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

①化行最简

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{r_3 \div (-3)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

$R(A) = 3 < 4$

②取(4-3)个自由未知数 (一般取没阶梯的)

其中 x_4 为自由未知数，取 $x_4 = k$ $\boxed{(k\text{为任意常数})}$

∴ 有通解：$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}k \\ x_2 = -3k \\ x_3 = \frac{4}{3}k \end{cases}$ $(k \in R)$，即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k \in R)$

③写成式

④写成矩阵的样子

T11 解：整理得：$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - (3+\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 \quad - (2+\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

∵ 要有非零解 ∴ $r(A) < 3$

化行最简找 $r(A) < 3$

或 $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_1 \div 2-\lambda}{\underset{r_2+5r_3}{=}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2-\lambda} & \frac{2}{2-\lambda} \\ 0 & -3-\lambda & 3+5(-2-\lambda) \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3+r_1}{\underset{(2-\lambda)}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2-\lambda} & \frac{2}{2-\lambda} \\ 0 & -3-\lambda & -7-5\lambda \\ 0 & -\frac{1}{2-\lambda} & -2-\lambda+\frac{2}{2-\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & -7-5\lambda \\ -\frac{1}{2-\lambda} & -2-\lambda+\frac{2}{2-\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -7-5\lambda \\ -1 & -(4-\lambda^2)+2 \end{vmatrix} \overset{r_1-(-3-\lambda)r_2}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -7-5\lambda+(-3-\lambda)(2-\lambda^2) \\ -1 & -2+\lambda^2 \end{vmatrix}$$

$= -7-5\lambda + (3+\lambda)(2-\lambda^2)$

$= -7-5\lambda + (6-3\lambda^2+2\lambda-\lambda^3)$

$= -1-3\lambda^2-3\lambda-\lambda^3$

$= -(\lambda+1)^3$

∴ 当 $\lambda = -1$ 时 有非零解

第四章

T1 $2\alpha_1+3\alpha_2-5\alpha_3 = (2,4,6)+(9,-6,3)-(10,-15,5)=(1,13,4)$

T5 (1) 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $\because$ β不能由A线性表示 $\therefore R(A)<3$ $\therefore$ $|A|=0=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix}1&0&0\\1&a-1&0\\a&1-a&1-a\end{vmatrix} \overset{\text{按第1行展开}}{=} (a-1)(1-a)$ $\therefore a=1$

(2) 令 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$(B|A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&4&1&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&1&1\\0&3&3&0&0&0\\0&6&3&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+2r_2\\r_3-r_2}]{\substack{r_2\div3\\r_3\div3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_3\times(-1)}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{array}\right)\end{array}$$

$\therefore \alpha_1=\beta_1+0\beta_2+0\beta_3$, $\alpha_2=\beta_1+0\beta_2+0\beta_3$, $\alpha_3=\beta_1+0\beta_2+0\beta_3$

T6 (2) $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&-3&1\\4&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+c_1]{c_2-2c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-7&3\\4&-7&3\end{vmatrix}=0$ $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

线性相关 $\Rightarrow =0$

T7 $\because |\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3| = \begin{vmatrix}1&4&3\\2&a&1\\-2&3&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-3c_1]{c_2-2c_1}\begin{vmatrix}1&4&3\\0&a-8&-5\\0&11&7\end{vmatrix}=7(a-8)+55=7a-1=0$ $\therefore$ 解得：$a=\frac{1}{7}$

T12 (1) $\because \alpha_1\neq0$, $\alpha_2\neq0$, $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$ $\therefore$ 极大无关组有 α_1,α_2 ; α_2,α_3 ; α_3,α_1

α_1,α_2线性无关

T13 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\4&1&0&2\\1&-1&-3&-6\\0&-3&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-7&-4&2\\0&-3&-4&-6\\0&-3&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{3})]{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&\frac{1}{3}&-1\\0&-3&-4&-6\\0&-7&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+7r_2]{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&\frac{1}{3}&-1\\0&0&-3&-9\\0&0&-\frac{5}{3}&-5\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_4+\frac{5}{3}r_3]{r_3\times(-\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&\frac{1}{3}&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&2\\0&1&\frac{1}{3}&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-\frac{1}{3}r_3]{r_1-\frac{1}{3}r_3}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{array}{cccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{array}\end{array}$

(1) $\therefore$ 由矩阵得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为极大线性无关组

(3) 由矩阵得：$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$

T19

、取 $\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 = \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

再单位化：$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，.

$$e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

T20 (1) ∵ 第1行元素平方和 $1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \neq 1$ ∴ 不是正交矩阵 这题第1行元素=第1列

第五章

T10 (2) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&5&-3&8\\3&4&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&-1&2\\0&-2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_1-2r_2}\begin{array}{c}x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\\ \begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$ 它俩自由

这俩不自由

①先化最简

②写同解方程组，设自由未知量为常数（任意）

每阶梯第1个未知量用自由未知量表示的方程组

$\begin{cases}x_1=-x_3+x_4\\x_2=x_3-2x_4\end{cases}$ 设 $x_3=k_1$，$x_4=k_2$，$k_1\in R$，$k_2\in R$

（把自由未知量设为任意常数）

③写通解

写成向量的样子

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+k_2\\k_1-2k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，$k_1,k_2$为任意常数

$\xi_1\to$ 基础解系 $\leftarrow\xi_2$

T11 (2) $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1\\r_4-4r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&4&-5\\0&7&-7&14\\0&14&-14&28\\0&7&-7&14\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-14r_2\\r_4-7r_2}]{r_2\times\frac{1}{7}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{array}{c}x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ \ b\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}$

①化行最简

非自由写同解~左边　　自由（写=右边）

②同上题

③同上题（多一个常数向量而已）

把x_3换成k

$\begin{cases}x_1=-1-2x_3\\x_2=2+x_3\end{cases}$，通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ $(k\in R)$

b

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\ \to\ x_3$ 加入↑

T13 讨论A秩 $\bar{A}=(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&1&1&1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&11&k\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&5&-3&7&k-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{array}{c}x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ \ b\\ \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&4&2\\0&-5&3&-7&-3\\0&0&0&0&k-5\end{array}\right)\end{array}$

根据定理 $R(A)<R(\bar{A})$无解　　∴ $k-5=0$ 时，即 $k=5$ 时，$Ax=b$有解

T15 容易考填空题 ∴也写一下吧

(1) $R(A)=R(\bar{A})=r=m<n$，则 $Ax=b$ 有无穷解

(2) $R(A)=R(\bar{A})=r=m=n$，则 $Ax=b$ 有唯一解

(3) 错的：$Ax=0$ 只有零解时 $|A|\neq0$，$Ax=b$ 有唯一解

回忆 Gramer 法则

T20 对增广矩阵 $\bar{A}$ 施初等行变换，得

$(\bar{A})=(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{array}\right)$

①化行最简

$\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_2\\-r_2}]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&2&-4\\0&1&-1&-2&9\\0&0&0&-2&-4\end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{r_2-r_3\\-\frac{1}{2}r_3}]{r_1+r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{array}\right)$

② → 同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-8-x_3\\x_2=13+x_3\\x_4=2\end{cases}$，③取 $x_3=0$ 得 $\begin{cases}x_1=-8\\x_2=13\\x_4=2\end{cases}$，

把上面x_3换成=0

④ 即得非齐次线性方程组的一个解为 $(-8,13,0,2)^T$.

⑤ 对应齐次线性方程组 $x_1=-x_3,x_2=x_3,x_4=0$，取

找它的通解去掉b这列就行

$x_3=1$ 得 $x_1=-1,x_2=1,x_4=0$，即对应齐次线性方程组的基础解系为 $\xi=(-1,1,1,0)^T$.