

《高等数学IV》练习题

一、填空题.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{5}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f'(1) = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知函数 $y = x^2 \ln x$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + 2e^t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 曲线 $y = x + 2x^3$ 在 $x = 1$ 处对应的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 函数 $f(x) = \ln(1 + 2x^2)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $\int f(x) dx = 3x \sin 3x + \cos 3x + C$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、单项选择题, 请把正确的选项填在题目括号内.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)$ 是 $-\frac{1}{2}x^2$ 的 () .

- A. 低阶无穷小 B. 等价无穷小
C. 高阶无穷小 D. 同阶无穷小, 但不等价

2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在是函数在该点连续的 () .

- A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 无关条件

3. 若函数的微分为 $dy = \cos x dx$, 则 $y'' =$ () .

- A. $-\sin x$ B. $\cos x$ C. $\sin x$ D. $-\cos x$

4. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x} , 则不定积分 $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx =$ () .

- A. $\ln \ln x + C$ B. $\frac{1}{x} + C$ C. $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$ D. $-\frac{1}{x} + C$

5. $\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 \sin^3 x) dx =$ () .

- A. 1 B. 2π C. 0 D. $2\pi^2$

三、求下列极限的值.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x - 1}{3x^2 - x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{-3x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{\ln(1+2x^2)}$$

四、计算下列各题.

1. 求由方程 $xy - e^x + e^y - 3 = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

2. 求参数方程 $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^2 \end{cases}$ 确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

3. 求函数 $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间与极值.

五、求下列积分.

1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+4)}$

$$2. \int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$$

六、应用题.

求由曲线 $y = \sin x$ 与 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 1$ 所围成平面图形的面积

七、证明题.

若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$