

广东海洋大学 2020 ——2021 学年第一学期

《 线性代数 》课程试题

课程号: 19221201

★考试
□考查□A 卷
★B 卷★闭卷
□开卷

题 号	一	二	三	四	五	六	总分	阅卷教师
各题分数	40	12	10	15	15	8	100	
实得分数								

一、填空 (每小题 4 分, 共 40 分)

(1) D_4 展开式中, $a_{41}a_{13}a_{22}a_{34}$ 所带的符号是 (+ 或 -): + ;(2) A 为三阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, $|A|=2$, $|AA^*|$ = 8 ;(3) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & 2 \\ k & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$, k = 0 或 4 ;(4) A^* 是 A 的伴随矩阵, $R(A)=0$, $R(A^*)$ = 0 ;(5) P_i 是初等矩阵, 已知:

$$P_1 P_2 \cdots P_n (A, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}} ;$$

(6) n 阶矩阵 A 可逆, A^T 的标准形是 E_n ;(7) $\alpha - \beta = (1, 3, -3)^T$, $2\alpha + \beta = (2, -3, 3)^T$, α = $(1, 0, 0)^T$;(8) 向量组: α, β, γ 线性相关, 向量组: $\alpha, 2\beta, 3\gamma$ 的线性相关性是: 线性相关 ;(9) n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=r$, 则其解空间的维数是 $n-r$;(10) $R(A) < R(A, b)$, 方程组 $Ax = 2b$ 的解的情况是: 无解 。

二.(12分) D_4 如下:

(1) 计算 D_4 的值;

(2) A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式, 计算 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ 的值。

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{解(1)} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad (6\text{分})$$

(2) $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad (6\text{分})$$

三、(10分) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AX = 2X + A$, 求 X 。

解: $(A - 2E)X = A$, $X = (A - 2E)^{-1}A$

$$(A - 2E, A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

四、(15 分) $(A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$

1. $R(A, \beta) = 2$, 求 a, b 的值;

2. 当 $R(A, \beta) = 2$ 时, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解。

解: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix},$$

1. $R(A, \beta) = 2$, 从而 $a = 1, b = -1$; (5 分)

2. 由行最简形, 最简方程组为:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases}, \text{ 取 } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得齐次方程组的基础解系: $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 取 } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 得原方程组的特}$

解: $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 原方程组的通解为 $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (c_1, c_2 为任意常数)。

(10 分)

五、(15 分) 矩阵 A 如下, 求矩阵 A 的列向量组的极大线性无关组, 并把其余向量表成它的线性组合;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 极大无关组: α_1, α_2 (5分)

$$(2) \alpha_3 = -2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \alpha_5 = \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2) \quad (5分)$$

六 (8 分) 设向量组 α, β, γ 线性相关, 证明: 向量组 $\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma$ 也线性相关。

证明: $(\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4分)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, R(\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma) = R(\alpha, \beta, \gamma) < 3$$

向量组: $\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma$ 线性相关。 4分