

广东海洋大学 2016—2017 学年第一学期

## 《线性代数》课程试题

课程号: 19221201

★ 考试  
□ 考查★ A 卷  
□ B 卷★ 闭卷  
□ 开卷

题 号	一	二	三	四	五	六	总分	阅卷教师
各题分数	40	20	10	15	15		100	
实得分数								

一、填空 (每小题 4 分, 共 40 分)

(1) 对 单位 矩阵进行一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

(2) A 为四阶方阵, A 的行列式  $|A|=2$ , 则  $|-2A^{-1}| = \underline{8}$  ;

(3) n 元线性方程组  $AX=b$  有唯一解的充要条件是  $R(A)=R(B)=n$     ;

(4)  $A^*$  是可逆矩阵 A 的伴随矩阵, 则  $A^* = \underline{-|A|} A^{-1}$  ;

$$(5) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2015} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2016} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

(6)  $|A|$  不等于零是 n 阶矩阵 A 的行向量组线性 无 关的充要条件;

(7) 已知  $\beta = (1, 2, -2)^T$ ,  $2\alpha - \beta = (1, -2, 2)^T$ , 则  $\alpha = (1, 0, 0)^T$     ;

(8) 向量组:  $\alpha, \beta$  线性相关, 则向量组:  $\alpha, \beta, \gamma$  线性 相 关 ;

$$(9) A_{m \times s} \times B_{s \times l} \times C_{l \times n} = D_{\underline{m} \times \underline{n}} ;$$

(10) 矩阵乘法是否满足结合律 是 ;

二. (1) 计算行列式  $|A|$  的值 (10分);

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 2 & c & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) 求矩阵 A 的逆 (10分)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 2 & c & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$$
$$\left( \begin{array}{c} 2 \end{array} \right)$$

[illegible]

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & -1/2 \end{pmatrix} \quad |A| = 4$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & -4 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ,  $AX = 2A^*X + A^3$ ,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵

$$AX = 2A^T X + A^3 \iff AX - 2A^T X = A^3 \iff (A - 2A^T)X = A^3$$

$$X = (A - 2A^T)^{-1} A^3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & -4 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/7 & & & \\ & -1/7 & & \\ & & -4 & \\ & & & -4 \end{pmatrix}$$

四、求矩阵 A 的列向量组的秩和一个极大线性无关组，并把其余向量用这个极大线性无关组线性表示（15分）。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & -3 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & -4 & -5 & -1 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4/3 & -1/9 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -1/3 & 14/9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4/3 & -1/9 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/9 & 14/27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

设 A 的第 j 列为  $\alpha_j$  (j=1,2,...,6) 向量组的秩为 3

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  为一个极大线性无关组

$$\begin{cases} \alpha_3 = -2\alpha_1 + 2/3\alpha_2 \\ \alpha_5 = -4/3\alpha_1 - 1/9\alpha_2 + 1/3\alpha_4 \\ \alpha_6 = -1/9\alpha_1 + 14/27\alpha_2 + 7/9\alpha_4 \end{cases}$$

五、(15分) 求线性方程组的通解：

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

解：对增广矩阵初等行变换

$(A, b) =$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因为秩  $R(A) = 3$ ,  $R(A, b) = 4$ ,

有:  $R(A) \neq R(A, b)$ ,

所以该方程组无解。