

第二章

概率

(1) 定义: 表示事件发生可能性大小.

(2) 记号: $P(A)$

三 概率 事件

(3) 性质:

① 加法性质:

$$1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{A} \cup \text{B} \\ \hline \end{array} \quad A \cup B = A + B - AB$$

$$\text{变形: } P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$2) P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(\bar{A}) \\ P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{cases}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline A \quad \bar{A} \\ \hline \end{array} \quad A + \bar{A} = \Omega$$

② 减法性质: $P(A - B) = P(A) - P(AB)$



$$A - B = A - AB$$

4) 注: $P(AB) \neq P(A) * P(B)$

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A - B) \neq P(A) - P(B)$$

$$= P(A - AB) = P(B - AB)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

古典概型 P₉.

1. 适用场合: { (1) 有限性
(2) 等可能发生.

2. 计算 $P(A)$ 方法: (个数之比)

$$P(A) = \frac{\text{所关心事件A的个数}}{\text{所有可能的结果个数}}$$

注: 找分母与分子中的个数时, 要注意两者个数的一致性,

① 若找分母个数时, 考虑顺序, 则找分子个数也要考虑顺序.

② 若找分母个数时, 不考虑顺序, 则找分子个数也不考虑顺序.

3. 如何找个数?

- 1) 两大原理 { ① 加法原理: 一步到位
② 乘法原理: 分步完成

2) 两条公式:

• 排列 (既选又排).

$$A_n^k = P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

• 组合 (只选不排)

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{其中 } n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

几何概型 P14

1. 适用场合: 试验结果有无穷个.

2. 求 $P(A)$ 的方法 (几何方法) {

- ① 长度之比 (一维)
- ② 面积之比 (二维). (比如两个人, 两个数)
- ③ 体积之比 (三维)

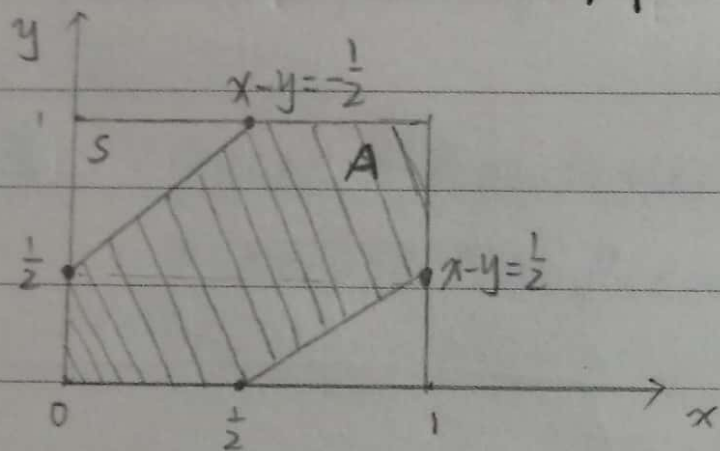
3. 步骤 (以二维情况为例)

① 先画图. ② 再算面积 ③ 再算面积之比

4. 例子1. $S = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1\}$. $A = \{(x, y) \in S \text{ 且 } |x - y| \leq \frac{1}{2}\}$.

画出 S 和 A 的图形, 并算出它们的面积.

去绝对值: $-\frac{1}{2} \leq x - y \leq \frac{1}{2}$



$$S_S = 1 \times 1 = 1$$

$$S_A = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

条件概率.

1. 符号: $P(B|A)$
↓ ↓ ↓
概率 关注事件B发生 事件A已经发生了.

思考: $P(B|\bar{A})$, $P(\bar{B}|\bar{A})$, $P(C|A \cup B)$ 含义.

2. 计算 $P(B|A)$ { ① 直观法: 适用摸球等具体场合.

② 公式法: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

<注意包含关系>

乘法公式.

1. 适用场合: 适用于两个或更多个事件同时发生的场合

2. 直观理解:

① AB 第一步先完成 $A \rightarrow A$ 在完成 A 基础上, 再完成 $B \rightarrow B|A$.

② ABC 第一步 $\rightarrow A$ 第二步 $\rightarrow B|A$ 第三步 $\rightarrow C|AB$

3. 公式: $P(AB) = P(A) \times P(B|A)$

注: $P(A \cap B) \neq P(A) + P(B)$.

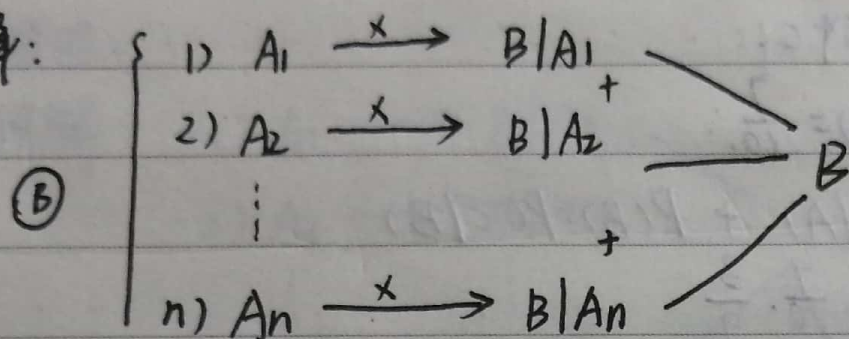
4. 推广思考: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$.

$P(ABCD) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot P(D|ABC)$

全概率公式. P19.

1. 适用场合: 适用于由多种情形/因素/原因, 导致该事件发生.

2. 直观理解:



3. 公式: $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$

即: $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)$

4. 解题步骤:

① 先设 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, B$, 分别表示...含义.

② 再找(求)出它们的概率.

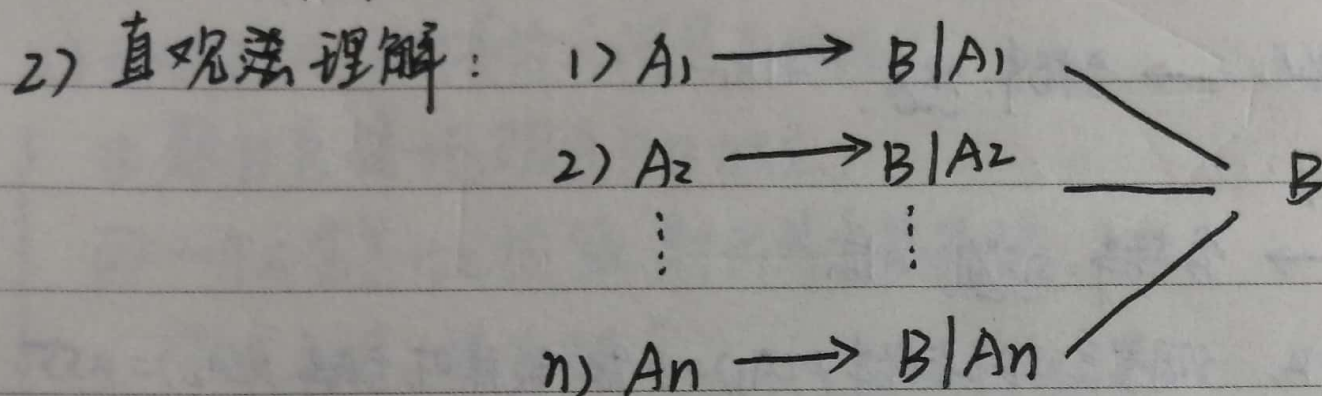
③ 套公式, 得解.

→ $[P(A_1) = \dots, P(B|A_1) = \dots, P(A_2) = \dots, P(B|A_2) = \dots, P(A_n) = \dots, P(B|A_n) = \dots]$

贝叶斯公式.

1) 适用场合: 已知某种结果发生了, 追究由某种情形或因素或原因造成的概率.

由果推因.



公式: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \times P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \times P(B|A_i)} = \frac{\text{所关心情况发生概率}}{\text{导致结果发生的所有情况概率}} \Rightarrow \text{比值.}$

$\downarrow$ 概率 $\downarrow$ 事件A发生的概率 $\rightarrow$ 事件B结果发生

3) 步骤:

① 先设 $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ 表示... 含义.

② 再求(找)出它们的概率.

③ 最后, 套公式, 求答案.

独立性的

1. 定义: 若 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ 成立, 则称 A 与 B 相互独立.

2. 直观理解: 一个事件的发生对另一个事件发生不构成影响.

3. 如何判断两个事件之间是否独立?

① 题目直接说明 A 与 B 独立.

② 一个人重复做投篮、射击等重复事情.

每次之间, 设为独立.

③ 两个人或多个人之间互相做事, 他们之间互相做的任何事, 都是相互独立.

4. 性质: 若 A 与 B 独立, 则

① A 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

② $\bar{A}$ 与 B 也相互独立.

③ $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

即: 只要 A 与 B 相互独立, 则以下4个式子都成立.

(i) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(ii) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$

(iii) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$

(iv) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$

5. 推广.

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$, n 个事件相互独立, 则它们之间的任何状态, 都相互独立.

6. 注意.

① $P(A \cap B) \xrightarrow{\text{无要求}} P(A) \times P(B|A) \neq P(A) \times P(B)$

$P(A \cap B) \xrightarrow{\text{要求 } A \text{ 与 } B \text{ 独立}} P(A) \times P(B)$

② $A \cap B = \emptyset \not\Rightarrow A \text{ 与 } B \text{ 相互独立.}$

反例: 抛硬币, $A = \{\text{正面}\}$, $B = \{\text{反面}\}$, $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ 不成立!

第二章 随机变量

随机变量.

1. 定义: 用数字去刻画实际结果. <数字化>
2. 记号: 用 X, Y, Z 或 ξ, η 等符号表示.
3. 分类:
 - ① 离散型: 取值为一个一个.
 - ② 连续型: 取值为一个区间.

离散型随机变量.

1. 定义: 取值为一个一个.

2. 刻画方式

分布律

① 表达式

$$P\{X=x_i\} = p_i \quad (i=1, 2, \dots)$$

$\uparrow$ 随机变量 $\downarrow$ 取值 $\downarrow$ 概率 $\rightarrow$ 所有情况

② 表格.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

3. 性质:

- ① $p_i \geq 0$, ② $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. (概率之和为1)

4. 如何求离散型随机变量 X 的分布律?

解题步骤: ① 先找取值. ② 再算概率. ③ 最后, 画表格

三个常见的离散型分布.

一) 两点分布 (0-1分布)

1. 适用场合: 试验只有2种可能的结果.

2. 公式: $P\{X=k\} = p^k \cdot (1-p)^{1-k}$, 其中 $k=0/1$.

X	0	1
P_i	$1-p$	p

($i=1,2$)

二) 二项分布.

1. 适用场合: 独立重复地做多次试验, 且每次试验只有2种可能的结果.

2. 公式:

$$P\{X=k\} = \underbrace{C_n^k}_{\substack{\downarrow \\ \text{恰好发生} k \text{ 次的概率}}} \times \underbrace{p^k}_{\substack{\downarrow \\ \text{种数}}} \times \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\substack{\downarrow \\ \text{关于事件发生} \\ k \text{ 次的概率}}} \quad (k=0,1,2,\dots,n) \quad \substack{\downarrow \\ \text{所有情形.}}$$

不关于事件发生 $n-k$ 次的概率.

注: $C_n^0=1$, $p^0=1$

3. 记号:

大写: $X \sim b(n, p)$ → 所关心事件, 有次试验中发生的概率.
 $\downarrow$ $\downarrow$
 服从二项分布 试验数做的次数

三) 泊松分布 <大量试验中稀有事件出现次数>

1. 适用场合: 题目会告诉.

2. 公式:

$$P\{X=k\} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\dots,\infty) \quad \substack{\downarrow \\ \text{恰好发生} k \text{ 次的概率.}} \quad \substack{\downarrow \\ \text{所有情形.}}$$

注: $e^0=1$, $e^{-\infty}=0$, $0!=1$, $e \approx 2.718$ 算答案, e 可保留.

3. 记号:

$X \sim P(\lambda) / \pi(\lambda)$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 关心事件 服从泊松分布 公式中参数.

4. 算概率:

① 先找出 λ 和 k . ($\lambda=np \gg 0$)

② 套公式. ③ 求答案.

离散型随机变量及其分布函数

1. 随机变量的分布函数.

一) 定义: $F(x) = P\{X \leq x\}$ 也写成 $P\{-\infty \leq X \leq x\}$ 起点永为 $-\infty$, x 为终点.

$\downarrow$ 分布函数 $\downarrow$ 概率 $\downarrow$ 随机变量 $\downarrow$ 自变量
↑ 公式范围

二) 性质:

① 有界性: $0 \leq F(x) \leq 1$

② 单调不减.

③ 相异性: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

三) 如何求离散型随机变量的分布函数 $F(x)$?

① 先画图, 写出分布函数公式: $F(x) = P\{-\infty \leq X \leq x\}$

② 再分段讨论

③ 最后总结答案.

注: 分段讨论时, 区间一定是左闭右开的.

如: $x < 1 \Leftrightarrow -\infty \leq x < 1$

$x \geq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x < +\infty$

连续型随机变量及其分布 P42.

一) 定义: $F(x) = P\{-\infty \leq X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ $F'(x) = f(x)$.

积分上限变动
积分下限固定
被积函数
也称: 概率密度函数

分布函数

二) 性质:

① $P\{-\infty \leq x \leq +\infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \xrightarrow{\text{用途}} \text{求未知常数}$

② $P\{a \leq x \leq b\} = \int_a^b f(x) dx \xrightarrow{\text{用途}} \text{算概率.}$

三) 方法: 积分法

① 先找出积分区间.

② 再拆分积分区间

③ 最后算积分结果.

例: $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

求 $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

$$= \int_{-1}^2 x dx + \int_2^3 x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^2 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_2^3$$

$$= \frac{47}{6}$$

• 如何求连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$?

问题: 已知 $f(x)$, 求分布函数 $F(x)$?

① 方法: 公式法 (也称积分法)

$$F(x) = P\{-\infty \leq X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

上限 x 可变动
已知
下限固定 $-\infty$

② 步骤:

(i) 先画图 (范围图), 并写出公式 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

(ii) 分段讨论

(iii) 最后, 总结.

③ 检验答案准确性.

如果所求分布函数 $F(x)$ 在端点处左右两侧函数值相等, 则答案正确, 否则, 错误.

三个常见连续型分布

一、均匀分布. $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, ($b > a$)

① 适用场合: 适用于在区间上任一点发生概率都相等.

题目常见“均匀”、“等可能”字眼.

② 公式:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

③ 记号:

$X \sim U[a, b]$
 随机变量 $\downarrow$ 服从 $\downarrow$ 均匀分布 $\rightarrow$ 表明在 $[a, b]$ 区间上.

④ 算概率:

(i) 方法: 积分法, $P\{c \leq x \leq d\} = \int_c^d f(x) dx$

(ii) 步骤: 1) 先找出 a 和 b , 并求出 $f(x)$.

2) 再找积分区间.

3) 最后求出积分结果.

二、指数分布. $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

① 适用场合: 常用于电子产品寿命场合, 一般是题目会说明.

② 公式:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

③ 记号:

$X \sim E(\lambda)$ 或 $e(\lambda)$
 随机变量 $\downarrow$ 服从 $\downarrow$ 指数分布 $\rightarrow$ 公式中的参数.

④ 算概率:

(i) 方法: 积分法 $P\{c \leq x \leq d\} = \int_c^d f(x) dx$.

(ii) 步骤: 1) 先找出 λ , 并求出 $f(x)$.

2) 找积分区间. 3) 求答案.

注: $e^0 = 1$, $e^{-\infty} = 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx &= \int_a^b -e^{-\lambda x} d(-\lambda x) \\ &= -e^{-\lambda x} \Big|_a^b \end{aligned}$$

三). 正态分布.

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2.$$

1. 适用场合: 题中说明. 常出现“正态分布”字眼 / $N(\mu, \sigma^2)$ 记号.

2. 公式:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \rightarrow \text{非标准正态分布公式.}$$

特别地: 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时, 正态分布就变为标准型正态分布.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow \text{标准正态分布.}$$

3. 记号:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

↓ ↓ ↓
随机变量 服从 正态分布 公式参数

$$X \sim N(0, 1)$$

↓ ↓ ↓
随机变量 服从 标准正态分布.

4. 算概率: 查表 p226.

① 方法: 例: $P\{X \leq 2.18\} = 0.9854$

↓ ↓
查表 查行

② 查表前, 需满足以下三个条件:

(i) 先看是否符合标准正态分布, 若不是, 则需转化为标准正态分布. 用到公式:

$$\text{若 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 则 } \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

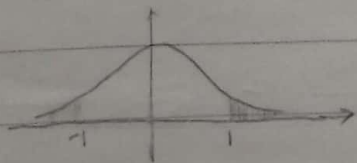
(ii) 再看符号, 只查“ $\leq$ ”或“ $<$ ”号.

如果是“ $>$ ”号, 用 1 减去其反面.

若是区间, 用后面减去前面: eg. $P\{X > 3\} = 1 - P\{X \leq 3\}$.

$$P\{2 \leq X \leq 4\} = P\{X \leq 4\} - P\{X \leq 2\}.$$

(iii) 最后, 查数值. 只能查非负数, 如果是负数, 利用对称性转化为正值.



$$P\{X \leq -1\} = P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

③ 常用技巧: 同减同除. < 常用于非标准正态分布 >

$$\text{eg. 若 } X \sim N(1, 4), \text{ 则 } P\{2 \leq X \leq 3\} = P\left\{\frac{2-1}{2} \leq \frac{X-1}{2} \leq \frac{3-1}{2}\right\} = P\left\{\frac{1}{2} \leq \frac{X-1}{2} \leq 1\right\} = P\left\{\frac{X-1}{2} \leq 1\right\} - P\left\{\frac{X-1}{2} \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

随机变量函数分布.

1. 离散型.

已知:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n	$\dots$

 令 $Y=g(x)$, 求 Y 的分布律.

- ① 方法: 画表格. ② 技巧: 取值相同, 概率相加.
 ③ 步骤: I. 先找取值. II. 用算概率. III. 最后, 画表格.
 ④ 检验: 概率之和为 1.

2. 连续型.

已知 $X \sim f_X(x)$, 令 $Y=g(x)$, 求 $f_Y(y)$.
 $\rightarrow$ 概率密度函数

① 方法: 公式法. P52 定理 2.2. (2-18). 只适用于单调函数.

② 步骤: I 由 $Y=g(x)$ 解出, $x=h(Y)$.

II. 求导: $h'(Y)$

III. 代入公式.

注: $f_Y(y)$ 的定义域: 由 $f_X(x)$ 的定义域与 $Y=g(x)$ 函数共同决定.

定理 2.2 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, $-\infty < x < +\infty$, 又设

$g(x)$ 处处可导, 且 $g'(x) > 0$ 或 < 0 , 则 $Y=g(x)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数. $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

确定 Y 的定义域

二维随机变量

1. 定义: 用一对对的数值去刻画试验的结果.

2. 记号: 用 (X, Y) 或 (ξ, η) 等符号表示.

3. 分类: ① 离散型
② 连续型.

二维离散型随机变量

1. 定义: 取值为一对对.

2. 刻画方式: { 1. 通项公式: $P\{X=x_i \text{ 且 } Y=y_j\} = P_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3, \dots)$

$\downarrow$ 概率 $\downarrow$ 随机变量 $\downarrow$ 取值 $\downarrow$ 同时取值 $\downarrow$ 概率值 $\downarrow$ 所有情形

统计: 联合分布律.

(2) 表格:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
y_1	P_{11}	P_{12}	$\dots$	P_{1i}	$\dots$
y_2	P_{21}	P_{22}	$\dots$	P_{2i}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$
y_j	P_{j1}	P_{j2}	$\dots$	P_{ji}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$

3. 性质: ① $P_{ij} \geq 0$ ② $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} = 1$. (概率之和为1).

4. 如何求二维离散型 (X, Y) 的联合分布律?

1) 步骤: ① 先找取值. ② 再算概率 $\Rightarrow$ 用“套体法”求概率. 不能分开求概率.

② 画二维表格.

eg. $P\{X=1 \text{ 且 } Y=2\} \neq P\{X=1\} \times P\{Y=2\}$

(2) 检验: 概率之和为1.

关于离散型随机变量的两种分布律.

No.

DATE

离散型边缘分布律: P67.

1. 定义: 只考虑一者, 不考虑另一者.

2. 方法:
 ① 取值: 看第一行/第一列.
 ② 概率: 把所在行或列概率值相加.

3. 验证: 概率之和为1.

④ 例子: 若 (X, Y) 的联合分布律为:

$X \backslash Y$	1	2
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

 求 X 与 Y 的边缘分布律?

解: ① 先求 X 的边缘分布律:

$$P\{X=1\} = P\{X=1, Y=3\} + P\{X=1, Y=4\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$P\{X=2\} = P\{X=2, Y=3\} + P\{X=2, Y=4\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{同理: } P\{Y=3\} = \frac{3}{8} \quad P\{Y=4\} = \frac{5}{8}.$$

$\therefore Y$ 的边缘分布律:

Y	3	4
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$\therefore X$ 的边缘分布律:

X	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

离散型条件分布律: P20.

1. 定义: 已知在一者满足条件下, 关心另一者.

2. 方法:
 ① 取值: 看表头.

② 概率: 利用条件概率公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

$$\text{例如: } P\{Y=2|X=1\} = \frac{P\{X=1, Y=2\}}{P\{X=1\}}$$

3. 验证: 概率之和为1.

④ 例子: 已知 (X, Y) 的联合分布律为:

$X \backslash Y$	1	2
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

 求 $X=1$ 时, Y 的条件分布律?

$$\text{解: (1) } P\{Y=3|X=1\} = \frac{P\{X=1, Y=3\}}{P\{X=1\}} = \frac{P\{X=1, Y=3\}}{P\{X=1, Y=3\} + P\{X=1, Y=4\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$P\{Y=4|X=1\} = \frac{P\{X=1, Y=4\}}{P\{X=1\}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore$$

K	3	4
$P(Y=K X=1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

二维连续型随机变量

1. 定义: 取值为某个区域.

2. 记号: $(X, Y) \sim f(x, y)$

二维随机变量服从 $\rightarrow$ 联合概率密度函数.

3. 性质:

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx = 1 \quad \xRightarrow{\text{用}} \text{求未知常数.}$$

$$\textcircled{2} P\{(X, Y) \in G\} = \iint_{(x, y) \in G} f(x, y) dy dx \quad \xRightarrow{\text{用}} \text{算概率.}$$

4. 方法:

= 全积分法: 先积 y , 再积 x .

5. 步骤: <一画一线四坐标>

① 先画出 x 和 y 范围图, 即 x 与 y 的积分区域图.

② 再分别找出 x 和 y 的积分上、下限:

(i) x 的积分上、下限: 观察法: 即为 x 和 y 的范围图.

在 x 轴上的起点和终点横坐标. <也称投影>.

(ii) y 的积分上、下限: 画竖线法: 画一条穿过积分区域图中的竖线,

找出上下两个交点的纵坐标.

注: 若交点坐标不是常数, y 要用 x 的表达式表示出来.

③ 最后, 算出全积分的结果.

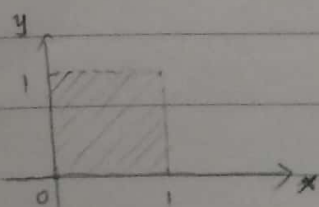
6. 例子:

$$G_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1\}$$

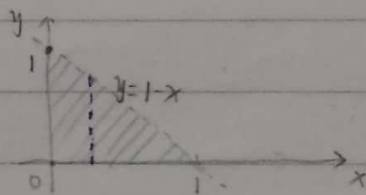
$$G_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1-x\}$$

$$G_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x^2 \leq y \leq x\}$$

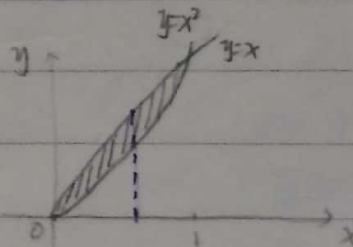
画出 G_1, G_2, G_3 图形, 并找出它们的积分上下限.



$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$$



$$\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx$$



$$\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx$$

二维连续型随机变量边缘概率密度函数

1. 定义: $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ $f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$.

2. 步骤: <一画两线, 八坐标>

1) 先求 $f_x(x)$.

① 先找 $f_x(x)=0$ 的地方. (观察法: 即是范围图在 x 轴上起点和终点之外地方)

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0.$$

② 再找 $f_x(x) \neq 0$ 的地方. (范围图在 x 轴起点和终点之间的地方)

1° 先拆为积分区间.

方法: 画竖线法. 画一条竖线, 找出上、下两个交点的纵坐标. <求积分下限>

如果交点坐标不是常数, y 要用 x 表示出来.

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\text{下交点纵坐标}} f(x, y) dy + \int_{\text{下交点纵坐标}}^{\text{上交点纵坐标}} f(x, y) dy \\ &= \int_{\text{下交点纵坐标}}^{\text{上交点纵坐标}} f(x, y) dy + \int_{\text{上交点纵坐标}}^{+\infty} f(x, y) dy \end{aligned}$$

2° 再积非 0 的地方, 算出积分结果.

③ 总结.

2) 再求 $f_y(y)$

① 先求 $f_y(y)=0$ 的地方 (观察法: 即是范围图在 y 轴上起点和终点之外的地方)

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx = 0.$$

② 再找 $f_y(y) \neq 0$ 的地方. (范围图在 y 轴起点和终点之间的地方)

1° 先拆为积分区间.

方法: 画横线法. 找出左、右两个交点的横坐标. 若交点不是常数, 则 x 要用 y 表示出来.

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\text{左交点横坐标}} f(x, y) dx + \int_{\text{左交点横坐标}}^{\text{右交点横坐标}} f(x, y) dx + \int_{\text{右交点横坐标}}^{+\infty} f(x, y) dx$$

2° 再积非 0 的地方, 算出积分结果.

③ 总结.

3) 检验 答案: 积分为 1.

随机变量的独立性. P13.

1. 定义: 同时发生的概率等于各自发生概率的乘积.

2. 判断方法:

① 离散型:

1° 若 X 与 Y 独立. 判断方法 (金果通)

对于一切 x 和 y , 都有:

$$P\{X=x, Y=y\} = P\{X=x\} \times P\{Y=y\}.$$

2° 若 X 与 Y 不独立. 判断方法 (金果通)

找到一组 x_0 和 y_0 , 使:

$$P\{X=x_0, Y=y_0\} \neq P\{X=x_0\} \times P\{Y=y_0\}.$$

② 连续型:

1° 若 X 与 Y 独立. 判断方法

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

2° 若 X 与 Y 不独立. 判断方法

$$f(x, y) \neq f_X(x) \times f_Y(y).$$

3. 步骤:

① 离散型:

1° 先分别求出 X 和 Y 的边缘分布律.

2° 验证 $P\{X=x, Y=y\} \neq P\{X=x\} \times P\{Y=y\}$.

3° 最后下结论.

② 连续型:

1° 先分别求出 X 和 Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

2° 再验证 $f_X(x) \times f_Y(y) \neq f(x, y)$.

3° 最后下结论.

4. 例子: $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 则 $f_X(x) \times f_Y(y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

二维随机变量函数的分布 $\rightarrow P_{74}$

一、离散型

(1) 方法: 画表格.

(2) 步骤: i) 先找取值.

ii) 再算概率. <取值相同. 概率相加>

iii) 最后, 再画表格.

(3) max: 两两比较较大, 而不是最大.

min: 两两比较较小, 而不是最小.

4, 检验: 概率之和为1.

第四章 随机变量的数字特征.

数学期望 P_{89} — 随机变量取值的平均数.1. 定义 1) 离散型: 若 X 的分布律:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i
P_i	p_1	p_2	$\dots$	p_i

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \times p_i$$

$\downarrow$ 数学期望/均值 $\downarrow$ 求和 $\downarrow$ 取值 $\downarrow$ 相乘 $\rightarrow$ 概率.

2) 连续型: $X \sim f(x) \rightarrow$ 概率密度函数.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x) dx$$

$\downarrow$ 数学期望/均值 $\downarrow$ 积分 $\downarrow$ 取值 $\downarrow$ 相乘 $\rightarrow$ 概率密度函数.

注: 积分时, 只要积非0的地方, 把所有非0的地方积起来加在一起.

2. 函数的数学期望.

1) 离散型:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

 令 $Y = g(X)$. 则 $E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \times p_i$

$\downarrow$ 求和 $\downarrow$ 函数值 $\downarrow$ 相乘 $\rightarrow$ 概率值.

2) 连续型: $X \sim f(x)$, 则令 $Y = g(X)$.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \times f(x) dx$$

$\downarrow$ 积分 $\downarrow$ 函数值 $\downarrow$ 相乘 $\rightarrow$ 概率值.

注: 1) 注意积分匹配性. 2) 只要积非0的地方.

例子: $X \sim f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$$

$$E(X^3) = \int_0^1 x^3 \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^4 dx = \frac{2}{5}$$

3. 要记住 P_{91} 页表 4-15, 6 个常见的数学期望公式. 证明 P_{96} 4. 性质: 1) $E(k_1X + k_2Y + C) \xrightarrow{\text{线性}} k_1E(X) + k_2E(Y) + C$ 2) $E(XY) \xrightarrow{\text{独立性质}} E(X) \times E(Y)$

方差 P98. — 反映波动性.

1. 定义: $D(X) = E \{ [X - E(X)]^2 \}$
 ↓
 方差
 → 偏差平方的数学期望

2. 计算公式:

标准差(均方差) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

 ↓ ↓
 方差 X平方的数学期望 减去 X数学期望平方.

注: ① $E(X^2) \neq (E(X))^2$. ② 方差: 反映波动性. 越小越好.

3. 步骤: ① 离散型:

X	X_1	X_2	$\dots$	X_n
P	P_1	P_2	$\dots$	P_n

i) 先求 $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \times P_i$ — ①

ii) 再求 $E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 \times P_i$ — ②

iii) 最后求 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = ② - ①^2$

② 连续型: $X \sim f(x)$.

i) 先求 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times x dx$ — ①

ii) 再求 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times x^2 dx$ — ②

iii) 最后求 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = ② - ①^2$.

积分时, 只积非0的地方.

4. 记住几个常见分布的方差公式 P111 表4-15. 证明附后.

二项分布. 泊松分布. 均匀分布. 指数分布. 正态分布.

5. 性质:

• $D(kX + kY + c) \stackrel{\text{独立(XY独立)}}{=} k^2 D(X) + k^2 D(Y) + 0$.

注: 系数提出变平方倍. 常数提出变0.

• $E(kX + kY + c) \stackrel{\text{线性性质}}{=} k_1 E(X) + k_2 E(Y) + c$.

注: 系数. 常数均可提出, 且保持不变.

第五章 大数定律与中心极限定理.

大数定律.

一、切比雪夫不等式. P_{18} .

$$(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{上界} \\ \text{概率}}}{P} \left\{ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{X的数学期望}}}{|X - E(X)|} \geq \underset{\substack{\downarrow \\ \text{偏差} < \text{期望}}}{\varepsilon} \right\} \leq \frac{\underset{\substack{\rightarrow \text{方差} \\ \text{偏差的平方}}}{D(X)}}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0)$$

或者:

$$(2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{下界}}}{P} \left\{ |X - E(X)| \leq \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

注: $\sigma^2 = D(X)$ 表示方差. $\sigma = \sqrt{D(X)}$ 表示均方差或标准差. $\mu = E(X)$ 表示期望 E

例. 正常成年男子血液中, 1mL 的细胞数平均是 7300, 均方差 700. 用切比雪夫不等式估计每 mL 细胞数在 5200-9400 之间的概率.

$$E(X) = 7300, \quad \sigma^2 = D(X) = 700^2$$

$$P\{5200 \leq X \leq 9400\} = P\{5200 - 7300 \leq X - 7300 \leq 9400 - 7300\}$$

$$= P\{-2100 \leq X - 7300 \leq 2100\}$$

$$= P\{|X - 7300| \leq 2100\} \geq 1 - \frac{D(X)}{(2100)^2} = 1 - \frac{700^2}{2100^2} = \frac{8}{9}.$$

例1. 连续掷 4 次骰子, 点数的总和为 X , 估计 $P\{10 < X < 18\}$. 设 X_i 为第 i 次投骰子 ($i=1, 2, 3, 4$)

解: X_i 的分布为:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}, \quad E(X_i^2) = \frac{91}{6}, \quad D(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{35}{12}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 E(X_i) = 4E(X_i) = 14, \quad D(X) = \sum_{i=1}^4 D(X_i) = 4D(X_i) = \frac{35}{3}$$

$$P\{10 < X < 18\} = P\{10 - E(X) < X - E(X) < 18 - E(X)\}$$

$$= P\{-4 < X - 14 < 4\}$$

$$= P\{|X - 14| < 4\} > 1 - \frac{D(X)}{4^2} = 1 - \frac{35}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{13}{48}.$$

独立同分布中心极限定理. P.22.

- 一、内容: 1) 设随机变量 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ 相互独立且服从同一分布,
2) 具有共同的数学期望和方差.

$$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = \mu.$$

$$D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n) = \sigma^2.$$

结论:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\text{近似}} N(0, 1)$$

标注: $\sum_{i=1}^n X_i$ 为和, $n\mu$ 为期望或均值, $\sqrt{n}\sigma$ 为方差标准差, $N(0, 1)$ 为标准正态分布.

注: ① μ : 数学期望或均值.

② σ^2 : 方差. σ : 标准差或均方差. $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{D(X)}$.

③ 常见分布: 查表 P.11-4.15.

不常见分布: 题目会告诉 μ 和 σ^2 (或 σ)

二步骤: (关键找出 n, μ, σ , 再同减 $n\mu$, 同除 $\sqrt{n}\sigma$, 代标准正态分布, 查 P.26 表)

1) 先设 X_i 表示... 含义. ($i=1, 2, 3, \dots, n$)

2) 再验证定理中 2 条件: ① $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立.
② 服从同一分布.

3) 接着, 再写出定理.

4) 写出所找事件, 同减 $n\mu$, 同除 $\sqrt{n}\sigma$, 转化到标准正态分布.

5) 查表 P.26, 找出算出概率.

P124. 拉希拉斯中心极限定理.

一、内容: 已知 $X \sim b(n, p)$ $E(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$.
即 n 次独立重复试验.

结论: $\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从 $N(0, 1)$ 标准正态分布.

二、解题关键:

- 1) 先找出 n 和 p .
- 2) 再找出所求事件, 同减 np , 同除 $\sqrt{np(1-p)}$, 转化为标准正态分布.
- 3) 最后查表 P_{26} .

三、步骤:

- 1) 说明(设) X 表示一含义.
- 2) 指出 $X \sim b(n, p)$, 求出 $E(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$.
- 3) 找出所求事件.
- 4) 同减 np , 同除 $\sqrt{np(1-p)}$, 转化为标准正态分布.
- 5) 查表 P_{26} .

注: ① n : 总次数, p : 每一次中所关心事件的发生概率. ② 只适用于二项分布.

第六章 数理统计的基本概念

一、基本概念

1. 总体: 研究对象全体.
2. 个体: 总体中的每一个对象.
3. 容量: ~~数目中的~~ 总体中数目.
4. 抽样: 从总体中抽取个体的过程.
5. 样本: 从总体中取个体得到. <样本的均值, 方差由总体的均值, 方差决定>
6. 简单随机抽样特征: ① 独立性. ② 代表性.

二、统计量 P_{131}

1. 定义: 样本的函数, 不含未知参数.

三、三个常见的统计量

1. 样本均值: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.
2. 样本方差: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.
3. 样本标准差: $S = \sqrt{S^2}$.

四、三大分布 P_{132}

1. 卡方分布: (1) 定义: 若 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 独立且服从 $N(0, 1)$.

(χ^2 分布)

$$\text{则 } \chi^2 = \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}_{n \text{ 个平方和}} \sim \underbrace{\chi^2(n)}_{\substack{\text{服从} \\ \text{卡方分布}}} \quad \text{自由度: 由平方和个数决定.}$$

(2) 特征形式: 平方和形式.

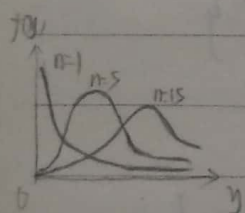
(3) 图像: 只在第一象限.

(4) 性质: ① 可加性: $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 且相互独立,

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi^2(n_1 + n_2).$$

② 若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

$$E(\chi^2) = n, \quad D(\chi^2) = 2n.$$



2. t 分布: 1) 定义: 若 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$.

$$\text{则 } t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 服从 t 分布 自由度: 由分母中平方和个数所决定.

2) 形式特征: 分式结构, 分母带根号.

3) 图像: 关于 y 轴对称.

3. F 分布: 1) 定义: $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$

$$\text{则 } F = \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m, n)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 服从 F 分布 自由度: 由分子中平方和个数决定, 由分母中平方和个数决定.

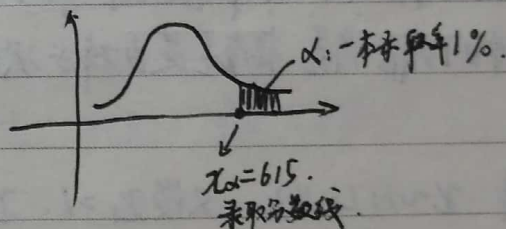
2) 形式特征: 分式结构, 分母不带根号.

3) 图像: 只在第一象限.

五. 上侧分位数:

$$P\{X \geq \chi_{\alpha}^2\} = \alpha$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 若域没 新分位数 概率.



六. 三大分布的上侧分位数. (查表)

1) 卡方分布: 查 $P_{230-231}$.

$$\chi_{0.05}^2(10) = 18.307$$

$\swarrow$ $\searrow$
 查第一行 第一列.

$$\chi_{0.95}^2(5) = 1.145 \quad \chi_{0.05}^2(5) = 11.071$$

$$\chi_{0.99}^2(10) = 2.558 \quad \chi_{0.01}^2(10) = 23.209$$

2) t 分布: 查 P_{229} .

$$\textcircled{1} t_{0.05}(8) = 1.8595$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 查第一行 第一列

② 化大为小, 取相反数

$$t_{\alpha}(n) = -t_{1-\alpha}(n).$$

$$\text{如 } t_{0.95}(8) = -t_{0.05}(8) = -1.8595.$$

$$t_{0.05}(3) = 2.3534 \quad t_{0.05}(5) = 2.0150$$

$$t_{0.05}(7) = 1.8946 \quad t_{0.05}(10) = 1.8124$$

3). F分布. 查 P₂₃₂₋₂₄₃.

① $F_{0.05}(4, 8) = 3.84$

分子自由度 4
分母自由度 8

② 分子为大, 分母为小, 先交换自由度, 再取倒数.

$$F_{\alpha}(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n, m)}$$

例: $F_{0.95}(8, 4) = \frac{1}{F_{0.05}(4, 8)} = \frac{1}{3.84}$

$$F_{0.95}(4, 6) = \frac{1}{F_{0.05}(6, 4)} = \frac{1}{6.16} = 0.162$$

$$F_{0.975}(3, 7) = \frac{1}{F_{0.025}(7, 3)} = \frac{1}{14.62} = 0.068$$

$$F_{0.99}(5, 5) = \frac{1}{F_{0.01}(5, 5)} = \frac{1}{10.97} = 0.091$$

七、弄清一组数据的区别.

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 又设 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 为来自总体 X 的样本.

参数 统计 均值 方差

总体均值 $\mu = E(X)$

总体方差: $\sigma^2 = D(X)$

总体标准差: $\sigma = \sqrt{D(X)}$

总体 $\longleftrightarrow$ 对比 $\longleftrightarrow$ 样本

样本均值: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

样本方差: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

样本标准差: $S = \sqrt{S^2}$

注. 总体的均值、方差、标准差是由总体决定的, 看出来的.

样本的均值、方差、标准差是由样本决定的, 算出来的.

例. 总体 $X \sim N(1, 4)$. 又设 $x_1=1, x_2=2, x_3=3$.

试求: $\mu = \underline{1}$ $\sigma^2 = \underline{4}$ $\sigma = \underline{2}$

$\bar{x} = \underline{2}$ $S^2 = \underline{1}$ $S = \underline{1}$

八、三大定理. 见书 P₁₃₅. 定理 6.1. 6.2. 6.3.

定理1: 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是取自 X 的一个样本, $\bar{x}$ 为该样本的均值.

则有 (1) $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ (2) $U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

第七章 参数估计

参数估计 P140

一、参数估计 { ① 点估计
② 区间估计.

二、估计方法: { (1) 矩估计法. <所求结果一定要加“^”>
(2) 最大似然估计法.

三、符号: 统称估计 { 估计量: $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\xrightarrow{\text{去估计}} \theta \rightarrow$ 未知参数.
 $\hat{\theta}$ 估计值: $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\xrightarrow{\text{去估计}} \theta \rightarrow$ 未知参数.

注: (1) 估计量, 是表达式, 用大写字母.

(2) 估计值, 是具体值, 用小写字母.

只有书写形式上的差别.

(3) $\hat{\theta}$ 一定要带“^”, 是估计的, 并非真实的.

四、矩估计法的思想.

用样本的均值去代替总体的均值.

五、矩估计法解题步骤.<回号>.

① 离散型.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
P	P_1	P_2	$\dots$	P_i	$\dots$

1) 先求总体均值, $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \times P_i$.

2) 再求样本均值, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

3) 令 $\bar{x} = E(X)$.

4) 解出 $\theta =$

② 连续型. $X \sim f(x)$.

1) 先求 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$.

2) 再求 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

3) 令 $\bar{x} = E(X)$.

4) 解出 $\theta =$

注: 积分时, 只积非0的地方.

求解时, 常用通项、换元、合并、展开等技巧.

P142: 最大似然估计.

- (1) 离散型:

$$L(\theta) = P\{x_1, \theta\} \times P\{x_2, \theta\} \times \dots \times P\{x_n, \theta\}. \quad \text{记为 } \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta).$$

↓ 似然函数 ↓ 连乘符号.

$$X \sim f(x, \theta) \text{ - 分布密度函数}$$

3. 如何求出似然函数?

- 注: ① 只知非口攻.

② 常见分布公式 A11.

不幸兄弟布公武，題目會告訴。

1) 先写出似然函数 $L(\theta) = \dots$

常用合并公式: 1) $\sum_{i=1}^n a = na$. 2) $\prod_{i=1}^n a = a^n$.

3) $a^x \times a^y = a^{x+y}$ 4) $x^a \times y^a = (x \times y)^a$.

注: ① $\ln(1) = \log_e(1)$. ② 常用对数公式: $\begin{cases} ① \ln(xy) = \ln x + \ln y & ④ \ln e = 1 \\ ② \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y & \ln 1 = 0. \\ ③ \ln x^y = y \ln x \end{cases}$

II. 复合函数求导: $[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \times f'(x)$.

注: ① 答案一定加上“ $\wedge$ ”
② 辛用术解投已有两部分, 物顶, 展开, 合并.

eg. $[\ln(1-x)]' = \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)'$
 $= -\frac{1}{1-x}$

估计量的评价标准 P146. - 讨论估计量好坏.

一) 无偏性.

1) 定义: $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.

2) 判断方法: ① 先算 $E(\hat{\theta})$.

② 再验证 $E(\hat{\theta}) \stackrel{?}{=} \theta$.

③ 最后, 下结论.

3) 规律: 系数之和为1.

二)

有效性

1) 定义: 若 $E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$.

如果 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

$\swarrow$ $\downarrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 方差 估计量 方差 估计量

2) 判断方法: ① 先算 $D(\hat{\theta}_1)$ 和 $D(\hat{\theta}_2)$.

② 再比较大小.

③ 最后, 下结论. <注: 方差越小, 越好, 越有效>.

3) 规律: 系数越平均越好. <有效>

置信区间 $P_{\text{us}} \cdot \langle \text{区间估计} \rangle$

1) 定义: $P\{ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \} = 1 - \alpha$, 则称 (θ_1, θ_2) 为参数 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 800元 手机价格 2000元 置信水平 置信区间.

如: $\alpha = 5\%$, 则 $1 - \alpha = 95\%$.

2) 公式:

前提	条件	已知问题置信区间	公式
正态总体	总体方差 σ^2 已知	总体均值 μ	$(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}})$
$N(\mu, \sigma^2)$	总体方差 σ^2 未知	总体均值 μ	$(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$
	总体均值 μ 未知	总体方差 σ^2	$(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)})$ 查表是个体

3) 步骤:

① 先确定, 再写出公式.

② 再找(求)出公式中的每个量.

③ 代入公式, 计算出答案.

注: ① 未知与已知区别: 凡是题目未告诉, 一律视为未知.

② α 由题目知或 $1 - \alpha$ 可求.

③ 符号: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ <样本均值>.

样本容量: n

样本方差: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

总体均值 μ

总体方差: σ^2

样本标准差: $s = \sqrt{s^2}$.

总体标准差: σ

④ 查表:

$U_{0.025} = Z_{0.025} = 1.96$

$U_{0.05} = Z_{0.05} = 1.645$

$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 和 $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 查 $P_{230-231}$.

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 查 P_{229} .