

《高等数学IV》练习题参考答案

一、填空题.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{5}{x} = \underline{5}$
2. 设 $f'(1) = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{x} = \underline{-3}$
3. 已知函数 $y = x^2 \ln x$, 则 $dy = \underline{x(2 \ln x + 1)dx}$
4. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + 2e^t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ 所确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \underline{\frac{1}{-}}$
5. 曲线 $y = x + 2x^3$ 在 $x = 1$ 处对应的切线方程为 $y = 7x - 4$
6. 函数 $f(x) = \ln(1 + 2x^2)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值为 $\ln 19$
7. 设 $\int f(x)dx = 3x \sin 3x + \cos 3x + C$, 则 $f(x) = \underline{9x \cos 3x}$.
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan x)^2 \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{1} = \frac{\pi^2}{4}$ 提示: 洛必达法则

二、单项选择题, 请把正确的选项填在题目括号内.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)$ 是 $-\frac{1}{2}x^2$ 的 (D).
A. 低阶无穷小 B. 等价无穷小
C. 高阶无穷小 D. 同阶无穷小, 但不等价
2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在是函数在该点连续的 (B).
A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 无关条件
3. 若函数的微分为 $dy = \cos x dx$, 则 $y'' =$ (A).
A. $-\sin x$ B. $\cos x$ C. $\sin x$ D. $-\cos x$
4. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x} , 则不定积分 $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx =$ (B).
A. $\ln \ln x + C$ B. $\frac{1}{x} + C$ C. $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$ D. $-\frac{1}{x} + C$
5. $\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 \sin^3 x) dx =$ (C).
A. 1 B. 2π C. 0 D. $2\pi^2$

三、求下列极限的值.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x - 1}{3x^2 - x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{-3x}$

解: 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x - 1}{3x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{2}{3}$ 提示: 抓大头

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-3} = e^{-3}$ 提示: 第二类重要极限

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{\ln(1+2x^2)}$ 提示: 至少用两次洛必达法则

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{\ln(1+2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{4} = -\frac{1}{4}$

四、计算下列各题.

1. 求由方程 $xy - e^x + e^y - 3 = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

解: 方程两边对 x 求导,

$$y + x \frac{dy}{dx} - e^x + e^y \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y},$$

由原方程知 $x=0$ 时 $y = \ln 4$, 所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{e^x - y}{x + e^y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=\ln 4}} = \frac{1 - 2 \ln 2}{4}.$$

2. 求参数方程 $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^2 \end{cases}$ 确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{3-2t}{2-2t} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{2^3(1-t)^3} = \frac{1}{4(1-t)^3}$

3. 求函数 $f(x) = x - \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间与极值.

解: 定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}$; 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$.

且当 $x = 0$ 时 $f'(x)$ 不存在.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

故所求函数单调增加区间为 $(-\infty, 0]$ 和 $[1, +\infty)$,

单调减少区间为 $[0, 1]$ 且极大值 $f(0) = 0$, 极小值 $f(1) = -\frac{1}{2}$

五、求下列积分.

1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+4)}$

2. $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$

解: 1.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) dx = \frac{1}{3} \left[\int \frac{d(x+1)}{x+1} - \int \frac{d(x+4)}{x+4} \right] \\ &= \frac{1}{3} (\ln|x+1| - \ln|x+4|) + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C \end{aligned}$$

2.

2. 解: 令 $t = \sqrt{2x+1}$, 则 $x = \frac{t^2-1}{2}$
 当 $x=0$ 时, $t = \sqrt{2 \times 0 + 1} = 1$ 当 $x=4$ 时, $t = \sqrt{9} = 3$
 所以 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} + 2}{t} d(\frac{t^2-1}{2})$
 $= \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} + 2}{t} \cdot t dt = \int_1^3 \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2} \right) dt$
 $= \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t \right) \Big|_{t=1}^{t=3} = \left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2} \right)$
 $= \frac{22}{6} + \frac{6}{2} = \frac{22}{3}$

六、应用题.

求由 $y = \sin x$ 与 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 1$ 所围成平面图形的面积

解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx = \left(x + \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

七、证明题.

若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$

证明: $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$, $f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x)$

设 $g(x) = \tan x - x$, $g'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$, $g(x)$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 单调递增,

故 $g(x) > g(0)$, 即 $\tan x - x > 0$, 得 $f'(x) > 0 \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$

$f(x)$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 单调递增, $f(x) > f(0)$, $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$