

高等数学上册知识点

一、函数与极限

(一) 函数

1、邻域

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}, \quad \overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}, \quad U(a)$$

2、函数定义（两函数相等）及性质（有界性、单调性、奇偶性、周期性）；

两函数相等 $\longleftrightarrow$ 它们的定义域和对应法则均相同.

3、反函数、复合函数、函数的运算；

4、基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数；

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

初等函数的基本特征：在函数有定义的区间内初等函数的图形是不间断的.

注：本课程所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

非初等函数举例：(1) 符号函数；(2) 狄利克雷函数.

(二) 极限

1、定义

1) 数列极限（唯一性，有界性，保号性）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 恒有 } |x_n - a| < \varepsilon$$

2) 函数极限（唯一性，局部有界性，局部保号性）

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{左极限: } f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$$

$$\text{右极限: } f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 存在} \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 可用 $\varepsilon-X$ 语言描述如下:

“ $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.”

定理 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$

2、 极限存在准则

1) 夹逼准则:

$$\left. \begin{array}{l} y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n \geq n_0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

2) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

3、 无穷小(大)量

1) 定义: 若 $\lim \alpha = 0$ 则称为无穷小量; 若 $\lim \alpha = \infty$ 则称为无穷大量.

2) 无穷小运算性质

定理 1 在同一过程中, 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

定理 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1 同一过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量

$$x \sin \frac{1}{x}, \quad x^2 \arctan \frac{1}{x} \text{ 都是无穷小.}$$

3) 无穷小与函数极限的关系

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

4) 无穷小的阶: 高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小

Th1 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ (等价无穷小替换)

4、求极限的方法

1) 夹逼准则;

2) 极限四则运算 (前提 $f(x), g(x)$ 极限均存在)

3) 函数连续性;

初等函数求极限的方法 (代入法)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{定义区间}).$$

4) 两个重要极限:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

5) 无穷小代换: ($x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 0 \text{ 且为常数})$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0)$$

注: 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 为无穷小. 在常用等价无穷小中, 用任意一个无穷小 $\beta(x)$ 代替 x , 等价关系依然成立.

例如, $x \rightarrow 1$ 时, 有 $(x-1)^2 \rightarrow 0$, 从而

$$\sin(x-1)^2 \sim (x-1)^2 \quad (x \rightarrow 1).$$

5、函数的连续性与间断点;

函数 $y = f(x)$ 在一点 x_0 处连续的等价定义:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

二、间断点的分类:

1. **第一类间断点**: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 称 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 称 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

2. **第二类间断点**: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在.

可能是**无穷型**的, 也可能是**振荡型**的.

6、闭区间上连续函数的性质: 有界性与最大值最小值定理、零点定理、介值定理及其推论.

1. 连续函数的四则运算

有限个连续函数的和、差、积、商 (分母不为零时) 仍为连续函数.

2. 反函数与复合函数的连续性

(1) 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, 函数 $f(u)$ 在点 a 处连续, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)].$$

(3) 设 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也连续.

3. 初等函数的连续性

基本初等函数在各自的定义域上都连续.

初等函数在其各自的定义区间上都连续. 这里定义区间指包含在其定义域内的区间.

4. 闭区间上连续函数的性质

最大值和最小值定理

在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

有界性定理

在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

零点定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号 (即 $f(a) \cdot f(b) < 0$), 那么在开区间 (a, b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点, 即至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

即方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少存在一个实根.

几何解释

介值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a) = A \text{ 及 } f(b) = B$$

那么, 对于 A 与 B 之间的任意一个数 C , 在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C (a < \xi < b)$.

几何解释

二、导数与微分

(一) 导数

1、 定义: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 或 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

左导数: $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

右导数: $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

定理 1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\iff$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

分段函数的导数

设函数 $f(x) = \begin{cases} u(x), & x \geq x_0 \\ v(x), & x < x_0 \end{cases}$, 其中 $u(x), v(x)$ 为可导函数.

试求 $f(x)$ 的导函数.

(1) 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) = u'(x)$;

(2) 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) = v'(x)$;

(3) 最后讨论函数在点 x_0 的可导性.

2、 几何意义： $f'(x_0)$ 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

3、 可导与连续的关系：

4、 求导的方法

1) 导数定义；

2) 基本公式；

3) 四则运算；

4) 复合函数求导 (链式法则)；

注： 复合求导法则可推广到多个中间变量的情形. 例如，
设 $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, 则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$
的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

初等函数的求导法则

1. 基本求导公式

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

5) 隐函数求导数;

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

6) 参数方程求导;

一阶求导公式: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

二阶求导方法:

先求出一阶导数, 再运用复合函数求导法则及反函数求导法则求二阶导数.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

7) 对数求导法.

先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数. 适用于多个函数相乘和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

5、 高阶导数

1) 定义: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$

1. 直接法: 由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

2. 间接法: 利用已知的高阶导数公式, 通过导数的四则运算, 变量代换等方法, 求出 n 阶导数.

高阶导数的运算法则

$$(1) (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}; \quad (2) (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)};$$

$$(3) (u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad \text{莱布尼茨公式}$$

常用初等函数的高阶导数公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a, (a > 0), \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$$

$$(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$(4) (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

$$(6) \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

(二) 微分

1) 定义: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中 A 与 Δx 无关.

2) 可微与可导的关系:

定理 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A=f'(x_0)$.

基本初等函数的微分公式

$$dy = f'(x)dx$$

$$d(C) = 0$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$$

三、微分中值定理与导数的应用

(一) 中值定理

1、Rolle 定理:

罗尔 (Rolle) 定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且在区间端点的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$, 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使 $f'(\xi) = 0$.

2、Lagrange 中值定理:

拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

3、柯西中值定理:

柯西 (Cauchy) 中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $g'(x)$ 在 (a, b) 内每一点处均不为零, 那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(二) 洛必达法则

定理 设 (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋于零; (2) 在点 a 的某邻域内 (点 a 本身可除外) $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$; (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大), 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注: 1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 上述定理仍然成立;

2. 对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 ($x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$), 也有与上述定理完全类似的结论:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(三) 单调性及极值

1、 单调性判别法:

定理 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导

(1) 若在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

2、 极值及其判定定理:

a) 必要条件: $f(x)$ 在 x_0 可导, 若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.

b) **第一充分条件**: $f(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 且 $f'(x_0) = 0$, 则①若当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 x_0 为极大值点; ②若当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 x_0 为极小值点; ③若在 x_0 的两侧 $f'(x)$ 不变号, 则 x_0 不是极值点.

综上所述, 可将求函数极值的步骤总结如下:

几何分析

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点, 及使 $f'(x)$ 不存在的点 x_k ;

(3) 检查 $f'(x)$ 在 x_k 左右的正负号, 确定极值点;

(4) 求出函数极值.

c) **第二充分条件**: (针对驻点)

定理 3 (第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

3、 凹凸性及其判断, 拐点

1) $f(x)$ 在区间 I 上连续, 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 在

区间 I 上的图形是凹的;若 $\forall x_1, x_2 \in I, f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 在

区间 I 上的图形是凸的.

2) 判定定理:

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数, 若在 (a, b) 内

(1) $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;

(2) $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.

3) 拐点: 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 $f(x)$ 的内点, 如果曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 曲线的凹凸性改变了, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

综上所述, 判定曲线的凹凸性与求曲线的拐点的步骤为:

(1) 求函数的二阶导数 $f''(x)$;

(2) 令 $f''(x) = 0$, 解出全部实根, 并求出使 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 对步骤 (2) 中求出的每一个点, 检查其邻近左、右两侧二阶导数 $f''(x)$ 的符号, 确定曲线的凹凸区间和拐点.

(四) 不等式证明

- 1、 利用微分中值定理;
- 2、 利用函数单调性;
- 3、 利用极值 (最值) .

(五) 最大值与最小值

步骤: 1. 求驻点和不可导点;

2. 求区间端点、驻点及不可导点的函数值, 比较大小, 哪个大哪个就是最大值, 哪个小哪个就是最小值.

四、 不定积分

(一) 概念和性质

- 1、 原函数：在区间 I 上，若函数 $F(x)$ 可导，且 $F'(x) = f(x)$ ，则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个原函数。
- 2、 不定积分：在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的全体原函数。基本积分表 (P105)

(1) $\int k dx = kx + C$ (k 是常数)	(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
(2) $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$)	(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
(3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ 说明	(10) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
(4) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	(11) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	(12) $\int e^x dx = e^x + C$
(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$	(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$	

- 3、 性质（线性性质）。

性质 1 两函数代数和的不定积分，等于它们各自积分的代数和。

即
$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

性质 2 求不定积分时，非零常数因子可提到积分号外面。

即
$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0);$$

(二) 换元积分法

- 1、 第一类换元法（凑微分）：

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(\varphi(x)) + c$$

常用的凑微分公式

	积分类型	换元公式
第一类换元积分法	1. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b) \quad (a \neq 0)$	$u = ax + b$
	2. $\int f(x^\mu) x^{\mu-1} dx = \frac{1}{\mu} \int f(x^\mu) d(x^\mu) \quad (\mu \neq 0)$	$u = x^\mu$
	3. $\int f(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int f(\sqrt{x}) d\sqrt{x}$	$u = \sqrt{x}$
	4. $\int f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} dx = - \int f\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right)$	$u = \frac{1}{x}$
	5. $\int f(a^x) \cdot a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int f(a^x) da^x$	$u = a^x$
	6. $\int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int f(\ln x) d(\ln x)$	$u = \ln x$
	7. $\int f(e^x) \cdot e^x dx = \int f(e^x) de^x$	$u = e^x$
	8. $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(\sin x) d\sin x$ $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = - \int f(\cos x) d\cos x$	$u = \sin x$ $u = \cos x$

第一类换元积分法	$\int f(\tan x) \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d\tan x$	$u = \tan x$
	$\int f(\cot x) \csc^2 x dx = - \int f(\cot x) d\cot x$	$u = \cot x$
	9. $\int \sin mx \cos nxdx$ $\int \sin mx \sin nxdx$ $\int \cos mx \cos nxdx$	利用积化和差公式进行变换
	10. $\int \sin^m x dx$ $\int \cos^m x dx \quad (m \text{ 为奇数})$	用公式 $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ 进行变换
	11. $\int \sin^m x dx$ $\int \cos^m x dx \quad (m \text{ 为偶数})$	化为倍角的三角函数降幂后再积分
	12. $\int f(\arctan x) \frac{1}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x)$	$u = \arctan x$
	$\int f(\arcsin x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x)$	$u = \arcsin x$

2、 第二类换元法（变量代换）：

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

变量代换（三角代换、倒代换、根式代换等）

(三) 分部积分法： $\int u dv = uv - \int v du$

记忆口诀：反对幂指三；

要点：口诀中排在前面的函数留在原位置作为 u 。排在后面的函数，将它的原函数经过适当的变形移到 d 后作为 v 。

五、 定积分

(一) 概念与性质：

1、 定义： $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

2、 性质：（7 条）

性质 7（积分中值定理） 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则至少 $\exists \xi \in [a, b]$,

$$\text{使 } \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad \left(\text{函数平均值: } f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \right)$$

(二) 微积分基本公式（N—L 公式）

1、 变上限积分：设 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，则 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

推广： $\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f[v(x)]v'(x) - f[u(x)]u'(x)$

应用：求导数，洛必达法则求极限

2、 N—L 公式：若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

(三) 换元法和分部积分

1、 换元法： $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

(被积函数， dx ， 积分上下限， 都对应换过来)

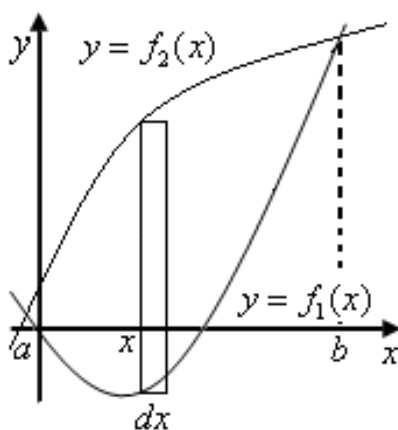
2、 分部积分法： $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

六、 定积分的应用

平面图形的面积

直角坐标： $A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$ (选 x 为积分变量)

$A = \int_c^d [g_1(y) - g_2(y)]dy$ (选 y 为积分变量)



参数方程情形：

$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y dx \xrightarrow{\text{换元}} \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) d\varphi(t) = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt$