

一、选择题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，总计 16 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1、设 A 与 B 均为 n 阶方阵，则下列结论成立的是（ ）。

- (A) $|AB|=0$ ，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$ ； (B) $|AB|=0$ ，则 $A=0$ 或 $B=0$ ；
(C) $AB=0$ ，则 $A=0$ 或 $B=0$ ； (D) $2B \neq 0$ ，则 $|B| \neq 0$ 。

2、设 $\lambda=1$ 是非零方阵 A 的一个特征值，则矩阵 $A^2 - 2A + 3E$ 有一个特征值为（ ）。

- (A) -1； (B) 1； (C) 2； (D) 3。

3、已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解， α_1, α_2 是其对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系， k_1, k_2 为任意常数，则方程组 $Ax=b$ 的通解可表为（ ）。

- (A) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ ； (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ ；
(C) $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ ； (D) $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ 。

4、设向量组 $\alpha_1 = (a, b, c)^T, \alpha_2 = (b, c, d)^T, \alpha_3 = (d, e, f)^T, \alpha_4 = (f, g, h)^T$ ，那么， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性关系（ ）。

- (A) 线性无关； (B) 线性相关；
(C) α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示； (D) 不能确定。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，总计 16 分）

5、已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & 9 & -3 \\ 1 & -4 & 7 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ ，则代数余子式 $A_{23} =$ _____。

6、已知 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ 则 $A^{-1} =$ _____。

7、设二次型 $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2$ ，则对应的对称矩阵为_____。

8、方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$
 的基础解系为 _____。

三、计算行列式（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分。）

9、计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

10、计算行列式 $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

四、证明题（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分。）

11、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关， $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ ， $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3$ ， $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_3$ ，证明：向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

12、设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$ ， E 为 n 阶单位阵，证明 $R(A) + R(E - A) = n$ 。

五、解答题（本题共 3 小题，每小题 12 分，满分 36 分。）

13、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ ，求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，并把

其余列向量用最大无关组线性表示。

14、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 阶矩阵 A 的列向量， α_2, α_3 线性无关，且 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 。如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ，求非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解。

15、设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求一个正交阵 P ，使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵。