高数 I 测试题 1 答案提示

一、填空题

1. $\underline{1}$ 2. $\underline{\frac{\sqrt{7}}{2}}$ 3. $\underline{-4}$ 4. $\underline{2}$

5. $\underline{0.08}$ 6. $\underline{\frac{\pi}{4}}$ 7. $\underline{y=x}$ 8. $\underline{一}$

二. 计算题（提示）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{2\sin^2 x}{x^2}}=\left\{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right\}^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}}=e^2.$

2.当$x\to 0$时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\ \ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\left(1-\cos x\right)}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^{2t}\cos t+t\cdot 2e^{2t}\cos t-te^{2t}\sin t}{2e^{2t}}=\dfrac{1}{2}(\cos t+2t\cos t-t\sin t).$

4. $$\left(y+xy'\right)e^{x+y}+xye^{x+y}\left(1+y'\right)+2=0$$

$$y'=-\frac{y\left(x+1\right)e^{x+y}+2}{x\left(y+1\right)e^{x+y}}$$

5. $y'=3\left(\ln x+\sqrt{x}\right)^2\left(\ln x+\sqrt{x}\right)'=3\left(\ln x+\sqrt{x}\right)^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{3\left(\ln x+\sqrt{x}\right)^2\left(2+\sqrt{x}\right)}{2x}$

$$\Rightarrow dy=y'dx=\frac{3\left(\ln x+\sqrt{x}\right)^2\left(2+\sqrt{x}\right)}{2x}dx.$$

6. $\int\frac{x}{1-4x^2}dx=\int\frac{1}{1-4x^2}d\left(\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{1-4x^2}d\left(-4x^2\right)$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{1-4x^2}d\left(1-4x^2\right)=-\frac{1}{8}\ln\left|1-4x^2\right|+C.$$

7. $\int x\,e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\int x\,e^{-3x}d\left(-3x\right)=-\frac{1}{3}\int x\,d\left(e^{-3x}\right)=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx$

$$=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}\int e^{-3x}d\left(-3x\right)=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C.$$

8. $\int_{-1}^{1}\left(x+1\right)\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$=0+2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

（或者：设$x=\sin t$， $dx=\cos t\,dt$，当$x=0$时, $t=0$， 当$x=1$时, $t=\pi/2$）

9. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dx}{2+x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan 1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

三．应用题（**提示**）

1. $V=\int_{1}^{\frac{4}{3}}\pi\ln^2 x\,dx=\cdots\cdots=\pi\left(\frac{4}{3}\ln^2\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\ln\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right).$

2. $y'=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},y''=-\frac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$; $y''=0\Rightarrow x=0,x=-\sqrt{3},x=\sqrt{3}.$

需要通过列表讨论进行判断(自行列表,略)

故曲线在$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ 内是凸的, 在$\left(-\sqrt{3},0\right)$内是凹的, 在$\left(0,\sqrt{3}\right)$内是凸的, 在$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$内是凹的. 曲线有拐点$\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$

四．证明题（提示）

1. 证明：令$f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$

则当$x>0$时, $f'(x)=-\sin x+x>0$,

故当$x>0$时, $f(x)$严格单调递增．又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

从而$f(x)>f(0)=0$，即证命题成立.

2. 证明：令$f(x)=x\ln x-2$, 则$f(x)$在$[1,e]$上连续，

又$\because f(1)=-2<0, \quad f(e)=e-2>0$,

由零点定理可得, 至少存在一点$\xi\in(1,e)$, 使得$f(\xi)=0$.

即方程$x\ln x=2$在区间$(1,e)$内至少有一个实根.