

高数 I 测试题 1

一、填空题

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x \sin \frac{1}{x}}, & x > 0 \\ a \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{1+x+x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设函数 $f(x) = \ln(1+2x)$, 则 $f''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+2x)$ 与 $e^{kx} - 1$ 是等价无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 $y = x^2$, 则当 $x = 2, dx = 0.02$ 时, $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 曲线 $y = xe^{-x}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. $x=1$ 是函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ 的第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 类间断点.

二. 计算题

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{2}{x^2}}$.
2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x}$.
3. 求由参数方程 $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = te^{2t} \cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$.
4. 设 $y = y(x)$ 由方程 $xye^{x+y} + 2x - 1 = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.
5. 设 $y = (\ln x + \sqrt{x})^3$, 求 dy .

$$6. \int \frac{x}{1-4x^2} dx$$

$$7. \int x e^{-3x} dx$$

$$8. \int_{-1}^1 (x+1) \sqrt{1-x^2} dx$$

$$9. \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2}$$

三. 应用题

1. 求曲线 $y = \ln x \left(x \in \left[1, \frac{4}{3} \right] \right)$ 与 x 轴及 $x = \frac{4}{3}$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积.

2. 求曲线 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 的凹凸区间和拐点.

四. 证明题

1. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$.

2. 证明方程 $x \ln x = 2$ 在区间 $(1, e)$ 内至少有一个实根.