

线性代数练习题参考答案

一、 填空题 (3×9=27 分)

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $|A|=2, |B|=-3$, 则 $|2AB^{-1}| = \underline{-\frac{2^{n+1}}{3}}$

2. 已知行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, 则元素 a_{21} 的代数余子式 $A_{21} = \underline{-8}$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = \underline{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$

4. 设 $A = (3, 2, 1), B = (1, -2, 1)$, 则 $A^T B = \underline{\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$

5. 方阵 A 可逆的充分必要条件为 $\underline{|A| \neq 0}$

6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 的秩 $R(A) = \underline{3}$

7. 向量组: α, β 线性相关, 则向量组: α, β, γ 的线性相关性是: 线性相关

8. 向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (其中 $s > r$) 的极大线性无

关组的充要条件是 $\underline{R(B) = R(A) = r}$

9. n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件为

$\underline{R(A) = R(A, b) = R(\bar{A})}$

二、 计算下列行列式的值（10 分）

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -4/3 & -29/3 \\ 0 & 0 & 13/3 & -7/3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -4/3 & -29/3 \\ 0 & 0 & 0 & -135/4 \end{vmatrix} = -270$$

三、 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ，求 A^{-1} （10 分）

解： $(A, E) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

四、 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 且满足 $AX = B$, 求矩阵 X (10 分)

解：方法一： $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$,

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

方法二：

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

五、 判断下列向量组的线性相关性 (7 分)

$$\alpha_1 = (1, 2, -1)^T, \quad \alpha_2 = (2, -3, 1)^T, \quad \alpha_3 = (2, -3, 1)^T$$

解：假设存在 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \vec{0}$ 成立, 则可得如下线性方程组:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 - 3k_2 - 3k_3 = 0 \\ -k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } R(A) = 2 < 3 \Leftrightarrow \text{有非零解}$$

故向量组线性相关。

六、 给定向量组 $\alpha_1 = (2, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (3, -2, 1)^T$, $\alpha_3 = (-5, 6, -5)^T$, 试判断 α_3 是

否为 α_1, α_2 的线性组合, 若是, 则求出组合系数 (10 分)

$$\begin{aligned} \text{解: } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 5/2 & -15/2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$R(\alpha_1, \alpha_2) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 所以 α_3 是 α_1, α_2 的线性组合

且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2$.

七、 设向量组 $\alpha_1 = (3, 1, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 7, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, 0, 1)^T$, $\alpha_4 = (6, 9, 4, 3)^T$

求其一个极大线性无关组, 并将其余向量通过极大线性无关组表示

出来 (10 分)

$$\text{解: } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(1) 极大无关组为: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

(2) $\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3$

八、 若 $AA^T = A^T A = E$, 求 $|A|$ (6 分)

解: 由 $AA^T = E \Rightarrow |AA^T| = |E| = 1 \Rightarrow |A||A^T| = 1$,

即 $|A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$.

九、 求 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$ 的通解 (10 分)

$$\text{解: } (A, b) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 & 13/7 & 13/7 \\ 0 & 1 & -2/7 & -4/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即同解线性方程组为: $\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$, x_3, x_4 为自由未知量,

对应的齐次线性方程组为: $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = +\frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$,

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

得齐次线性方程组的基础解系: $\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得非齐次方程组的一个特解: $\xi = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

原方程组的通解为: $x = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \text{ 为任意常数.}$