

1、设 $G=\langle a \rangle$ 为 12 阶循环群，则 G 的 3 阶子群是_____；

$\{0, 4, 8\}$

2、 Z 为整数集， $\forall x, y \in Z$ 定义 $x \circ y = x + y - xy$ ，求 $\langle Z, \circ \rangle$ 的单位元、可逆元素的逆元。

单位元：设 y 为单位元，则有 $x \circ e = x + e - xe = x \Rightarrow e = 0$

可逆元素的逆元，设 y 为 x 的逆元，则有 $x \circ y = x + y - xy = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{x-1} (x \neq 1)$

3、设 $\langle G, \circ \rangle$ 为群， $\forall a, b \in G$ ，有 $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$ ，则 G 为交换群

$(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2 \Rightarrow a \circ b \circ a \circ b = a \circ a \circ b \circ b \Rightarrow b \circ a = a \circ b$ (群满足消去律)

4、 $\langle Z_6, \oplus \rangle$ 为群，其中 $Z_n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $\oplus$ 为模 6 加法；

1) 求单位元 e ；2) $\forall x \in Z_n$ 求 x^{-1} ；3) 计算 4^{2022} ；4) 求所有的生成元

1) 单位元：0， 2)、 $0^{-1} = 0, 1^{-1} = 5, 2^{-1} = 4, 3^{-1} = 3, 4^{-1} = 2, 5^{-1} = 1$

3) $4^{2023} = 4$ ， 4)、生成元有 2 个，为：1, 5

5、证明：偶数阶群，必含二阶元。

由 $x^2 = e \Leftrightarrow |x| = 1$ 或 2. 即，对于 G 中元素 x ，如果 $|x| > 2$ ，必有 $x^{-1} \neq x$ 。

由于 $|x| = |x^{-1}|$ ，阶大于 2 的元素成对出现，共有偶数个。则 1 阶和 2 阶元总共应该是偶数个。

1 阶元只有 1 个（单位元），从而证明了 G 中必有 2 阶元。

6、设 G 为模 12 加法群，求 $\langle 4 \rangle$ 的所有右陪集。

$\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\}$

$\langle 4 \rangle + 0 = \langle 4 \rangle$ $\langle 4 \rangle + 1 = \langle 4 \rangle + 5 = \langle 4 \rangle + 9 = \{1, 5, 9\}$

$\langle 4 \rangle + 2 = \langle 4 \rangle + 6 = \langle 4 \rangle + 10 = \{2, 6, 10\}$ $\langle 4 \rangle + 3 = \langle 4 \rangle + 7 = \langle 4 \rangle + 11 = \{3, 7, 11\}$

7、设 G 为群， x, y 属于 G ，且 $yxy^{-1} = x^2$ ，其中 x 不是单位元，元素 y 的阶是 2，求元素 x 的阶。

$(yxy^{-1})(yxy^{-1}) = x^4 \Rightarrow yx^2y^{-1} = x^4$

y 是二阶元，有： $y^{-1}=y$ 把 $yxy^{-1} = x^2$ 代入到 $yx^2y^{-1} = x^4$ 中

$x^4 = yx^2y^{-1} = yyxy^{-1}y^{-1} = y^2xy^{-2} = x \Rightarrow x^3 = e$

因为 $|x| \neq 1$ ，所以有 $|x|=3$