

广东海洋大学 2019 — 2020 学年第一学期

《 线性代数 》课程试题

课程号: 32411102

☒ 考试☒ A 卷☒ 闭卷☐ 考查☐ B 卷☐ 开卷

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷教师
各题分数	30	10	10	5	15	10	20				100	
实得分数												

一、填空. (3×10=30 分)

1. 设 A 为三阶方阵, 且 $|A|=2$, 则 $|-3A| = \underline{-54}$ 2. 设 $\alpha=(1,-2,1)$, $\beta=(6,3,-9)^T$, 则 $\alpha\beta = \underline{-9}$.3. 设 D 是三阶行列式, 则 $a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} = \underline{0}$.4. 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 A 的伴随矩阵 $A^* = \underline{\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}$.5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^3 = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ 6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则该矩阵的秩 $r(A) = \underline{2}$ 7. 3 阶可逆矩阵 A 标准形为 $\underline{E_3}$.8. 向量组 $\alpha_1=[1,2,3]^T$, $\alpha_2=[2,3,4]^T$, $\alpha_3=[0,0,0]^T$, 则向量组 线性相关 (填“线性相关”或“线性无关”)9. n 元线性方程组 $Ax=0$, $r(A)=r$, 则 $Ax=0$ 有非零解的充要条件 $\underline{r < n}$ 10. 设 A 为正交矩阵, 则 $|A| = \underline{\pm 1}$.

二、计算行列式的值 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 。(10分)

解：按第一行展开得

$$D = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 2 - 4 \times \left[3 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 4 - 4 \times (-6 - 15)$$

$$= 88$$

三、已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，求 A^{-1} 。(10分)

解：(A E) = $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3+r_1]{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_2-3r_3]{r_3 \div (-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

故 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

四、设 A, B 都是 n 阶正交矩阵，求证： AB 是正交矩阵。(5分)

证明: 由于 A, B 均为正交矩阵, 则 $A^T A = E, B^T B = E$.

$$\begin{aligned}\therefore (AB)^T (AB) &= B^T (A^T A) B \\ &= B^T E B \\ &= E\end{aligned}$$

五、已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A 的列向量组的秩和一个极大

线性无关组, 并把其余向量用这个极大线性无关组表出. (15 分)

解: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+3r_1]{\substack{r_1+r_2 \\ r_2+r_1}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+2r_2]{\substack{r_2+2r_3 \\ r_4+r_3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1-3r_3]{\substack{r_3 \div 16 \\ r_4-10r_3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{\substack{r_2 \times (-1) \\ r_1 \times (-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故 $r(A) = 3 < n = 4$. $\therefore$ 向量组的一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
且 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

六、求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量. (10 分)

解: A 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = (4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时, 解方程 $(2E-A)x=0$

$$\text{由 } 2E-A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 得基础解系为 } p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ 对应于 $\lambda_1=2$ 的全体特征向量为 $k_1 p_1 (k_1 \neq 0)$.

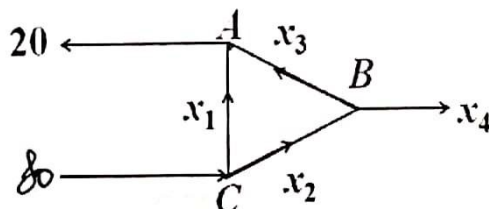
当 $\lambda_2=4$ 时, 解方程 $(4E-A)x=0$

$$\text{由 } 4E-A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 得基础解系为 } p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 对应于 $\lambda_2=4$ 的全体特征向量为 $k_2 p_2 (k_2 \neq 0)$.

长、网络流的基本假设是网络中流入与流出的总量相等, 并且每个联结点流入和流出的总量也相等. 现给出如下图所示的流量模式, 其中 A, B, C 为联结点, 且所有的流量都非负, 求 x_3 的最大可能值是多少? (20 分)

解: 根据网络流模型的基本假设.
在节点 A, B, C 处, 可以得到



$$A: x_1 + x_3 = 20$$

$$B: x_3 + x_4 = x_2$$

$$C: x_1 + x_2 = 80$$

此外, 该网络的总流入 80, 等于网络的总流

出 $(20 + x_4)$, 故可得到 $x_4 = 60$. 因此, 可得到:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 20 \\ -x_2 + x_3 = -60 \\ x_1 + x_2 = 80 \end{cases} \quad \text{该方程组的增广矩阵为} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & 1 & 60 \\ 1 & 1 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\text{经过初等行变换得其最简形为} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = x_3 + 20 \\ x_2 = x_3 + 60 \end{cases}$$

取 $x_3 = c (c \text{ 任意})$, 则 $x_1 = 20 + c$, $x_2 = 60 + c$, $x_3 = c$. 由于流量非负,

故 $x_1 \geq 0$. $\therefore x_3 \leq 20$. 因此 x_3 的最大可能为 20.