

《概率论与数理统计》课程试题答案

课程号: 19221302 ☒ 考试 ☒ A 卷 ☒ 闭卷  
☐ 考作 ☐ B 卷 ☐ 开卷

| 题号   | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  | 总分  | 阅卷教师 |
|------|----|----|----|----|----|----|-----|------|
| 各题分数 | 30 | 10 | 16 | 16 | 10 | 18 | 100 |      |
| 实得分数 |    |    |    |    |    |    |     |      |

一、填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 设 A, B, C 为三事件, 用 A, B, C 的运算关系表示 “A, B, C 中至少一个发生”  $A \cup B \cup C$
2. 设有 7 个数, 其中 4 个负数 3 个正数, 从中不放回地任取两数, 则 “取到的两数乘积是正数” 的概率为  $3/7$
3. 在区间  $[0, 1]$  上随机地取两个数, 则 “取到的两数之差的绝对值大于 0.4” 的概率为  $0.36$
4. 若随机事件 A, B 分别满足  $P(\bar{A})=0.3$ ,  $P(B)=0.4$ ,  $P(A \cup B)=0.9$ , 则  $P(A - B) = 0.5$
5. 若  $X \sim U(1, 6)$ , 则方程  $x^2 + Xx + 1 = 0$  有实根的概率为  $4/5$
6. 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$   
则  $P(X < 1.5) = 27/32$
7. 设 X 的分布律为  $\begin{matrix} X & 0 & 1 & 3 \\ P & 1/7 & 4/7 & 2/7 \end{matrix}$ , 则  $D(X) = 54/49$
8. 已知总体  $X \sim N(0, 4)$ , 又设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体 X 的样本, 记

统计量  $Y = \frac{\sqrt{2}(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}}$ , 则  $Y \sim t(4)$

9. 设  $X_1, X_2, X_3$  从正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  中抽取的样本, 对于以下总体均值  $\mu$  的估计量  $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ ,  $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{2}X_3$ ,

$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3$ , 则最有效的估计量是  $\hat{\mu}_1$

10. 为考察某大学成年男性胆固醇水平, 现抽取容量为 25 的样本, 测得样本均值  $\bar{x} = 186$ , 样本方差  $s^2 = 12^2$ . 假定胆固醇水平  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2$  未知, 则  $\mu$  的置信水平为 90% 置信区间为  $(181.89, 190.11)$   
(606(24)=1.7109)

按以往概率论考试结果分析, 努力学习的学生有 90% 的可能考试及格, 不努力的学生有 80% 的可能考试不及格. 据调查, 学生中有 70% 的人是努力学习的, 求考试及格的学生有多大可能是努力学习的学生? (10 分)

解: 设 “来自努力学习的学生” 为事件 A, “来自不努力学习的学生” 为事件  $\bar{A}$ . “学生考试及格” 为事件 B, (2 分)

由全概率公式

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$= 70\% \cdot 90\% + (1 - 70\%)(1 - 80\%) = 0.69 \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{则 } P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.06}{0.69} = \frac{2}{23} \quad (10 \text{ 分})$$

三. 设  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} c, & -1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求

(1) 未知常数  $c$ ; (3 分) (2) 分布函数  $F(x)$ ; (7 分)

(3)  $D(-3X+7)$  (6 分)

解 (1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  得  $\int_{-1}^3 cdx = 1$  (2 分)

$$\text{所以 } c = \frac{1}{4} \text{ (3 分)}$$

(2) 由  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

当  $x < -1$  时  $f(x) = 0$ , 所以  $F(x) = 0$ ; (2 分)

当  $-1 \leq x < 3$  时  $F(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{4}dt = \frac{x+1}{4}$ ;

当  $x \geq 3$  时  $F(x) = \int_{-1}^3 \frac{1}{4}dt = 1$  (6 分)

所以  $X$  的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ (x+1)/4 & -1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$  (7 分)

(3) 由于  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^3 \frac{x}{4}dx = 1$  (2 分)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^3 \frac{x^2}{4}dx = \frac{7}{3} \text{ (4 分)}$$

$$\text{则 } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{4}{3}$$

所以  $D(-3X+7) = 9D(X) = 12$  (6 分)

四. 一袋中装有 3 只黑球, 2 只红球, 2 只白球, 在其中任取 2 只球,

以  $X$  表示取到的黑球的只数, 以  $Y$  表示取到红球的只数, 求

(1)  $X$  和  $Y$  的联合分布律; (7 分) (2) 判断  $X$  和  $Y$  的独立性; (5 分)

(3)  $P\{X=1|Y=1\}$  (4 分)

解 (1)  $X$  和  $Y$  的所有可能的取值均为 0, 1, 2,

$\{(X, Y) = (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} = \emptyset$ , 其概率为 0 (2 分)

$$P\{(X, Y) = (0, 0)\} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}, \quad P\{(X, Y) = (0, 1)\} = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$$

$$P\{(X, Y) = (0, 2)\} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{21} \text{ (5 分)}$$

同理可得,  $X$  与  $Y$  的联合分布律为

| X \ Y | Y    |      |      |       |
|-------|------|------|------|-------|
|       | 0    | 1    | 2    |       |
| 0     | 1/21 | 4/21 | 1/21 | (7 分) |
| 1     | 6/21 | 6/21 | 0    |       |
| 2     | 3/56 | 0    | 0    |       |

(2)  $X$  与  $Y$  的边缘分布律分别为

| X | Y   |     |     | P                    |
|---|-----|-----|-----|----------------------|
|   | 0   | 1   | 2   |                      |
| P | 2/7 | 4/7 | 1/7 |                      |
|   |     |     |     | (3分)                 |
|   |     |     |     |                      |
|   |     |     |     | 10/21   10/21   1/21 |

$$P\{(X, Y) = (0, 0)\} = 1/21$$

$$P\{X=0\}P\{Y=0\} = \frac{20}{147} \neq P\{(X, Y) = (0, 0)\}$$

所以  $X$  与  $Y$  不相互独立. (5 分)

$$(3) P\{X=1|Y=1\} = \frac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{Y=1\}} = \frac{6/21}{10/21} = \frac{3}{5} \quad (4 \text{ 分})$$

五. 独立地进行射击, 每次射击中的概率为 0.1, 利用中心极限定理, 求 500 次射击中, 射中的次数在区间 (49, 55) 之中的概率.

$$(\text{已知 } \Phi(0.75) = 0.7734 \quad \Phi(0.15) = 0.5596) \quad (10 \text{ 分})$$

解 设 500 次射击中射中的次数为  $X$  则  $X \sim b(500, 0.1)$

$$E(X) = 500 \times 0.1 = 50, \quad D(X) = 500 \times 0.1 \times (1 - 0.1) = 45 \quad (4 \text{ 分})$$

由中心极限定理

$$\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - 50}{3\sqrt{5}} \text{ 近似服从 } N(0, 1) \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(49 < X < 55) &= P\left(\frac{49-50}{3\sqrt{5}} < \frac{X-50}{3\sqrt{5}} < \frac{55-50}{3\sqrt{5}}\right) \\ &\approx \Phi(0.75) - \Phi(-0.15) = \Phi(0.75) + \Phi(0.15) - 1 = 0.333 \quad (10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

六. 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^\alpha, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\alpha(\alpha > -1)$  是未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自  $X$  的样本, 求参数  $\alpha$  的

(1) 矩估计值; (8 分) (2) 最大似然估计值. (10 分)

$$1) \mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot (\alpha+1)x^\alpha dx = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

$$\text{解得 } \alpha = \frac{1-2\mu_1}{\mu_1-1} \quad (4 \text{ 分})$$

用样本矩  $\mu_1$  估计总体矩  $\mu_1$ , 得  $\alpha$  的矩估计量为

$$\hat{\alpha} = \frac{1-2\bar{x}_1}{\bar{x}_1-1} = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1} \quad (8 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由于样本 } X_i \sim f(x_i) = \begin{cases} (\alpha+1)x_i^\alpha, & 0 < x_i < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

似然函数

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n [(\alpha+1)x_i^\alpha], & 0 < x_i < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} (\alpha+1)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\alpha & 0 < x_i < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

----- (3 分)

显然  $L(\alpha)$  的最大值点一定是  $L_1(\alpha) = (\alpha+1)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\alpha$  的最大值点,

$$\text{取对数 } \ln L_1(\alpha) = n \ln(\alpha+1) + \alpha \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = n \ln(\alpha+1) + \alpha \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{求导数 } \frac{d \ln L_1(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L_1(\alpha)}{d\alpha} = 0 \text{ 解得}$$

$$\alpha \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1 \quad (10 \text{ 分})$$

《概率论与数理统计》课程试题(40 学

时)

课程代码: 19221302  
☒ 闭卷 ☐ 开卷  
☒ A 卷 ☐ B 卷  
☐ C 卷 ☐ D 卷  
☐ E 卷 ☐ F 卷

一、填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 设  $A, B, C$  为三个事件, 则用  $A, B, C$  的运算关系表示事件“ $A, B, C$  至少有一个发生”为  $A \cup B \cup C$
2. 设  $P(A)=0.5, P(B)=0.3, P(A \cup B)=0.6$ , 则  $P(AB)=0.3$
3. 某射手对一目标独立射击 4 次, 每次射击的命中率均为 0.5, 则 4 次射击中恰好命中 3 次的概率为  $1/4$
4. 在区间  $(0,1)$  上随机地取两个数, 则“取到的两数之差的绝对值大于 0.5”的概率为  $1/4$
5. 设随机变量  $X$  的分布律为:  
 $P\{X=k\}=\frac{k}{10}, (k=1,2,3,4)$ ,

则  $P\{X>2.5\}=\underline{0.7}$ 。

6. 设二维随机变量  $(X,Y)$  的概率密度为  $f(x,$

$$y)=\begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则  $P\{X \leq \frac{1}{2}\}=\underline{0.5}$ 。

7. 设  $X \sim f(x)=\begin{cases} kx^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 其中  $k$  未知, 则  $E(X)=\underline{45/28}$ 。

8. 若  $X \sim N(1,16)$ , 则  $\frac{X-1}{4} \sim \underline{N(0,1)}$

9. 已知总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , 又设  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  为来自总体的样本, 则  $\frac{2}{3} \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{X_4^2 + X_5^2} \sim \underline{F(3,2)}$

10. 设总体  $X$  的期望为  $\mu$ ,  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是总体  $X$  的一个样本。如果用统计量  $T = \frac{X_1}{8} + cX_2 + \frac{X_3}{2} + \frac{X_4}{8}$  作为  $\mu$  的无偏估计, 则  $c = \underline{1/4}$

- 二. 仓库中有 10 箱同一规格的产品, 其中 2 箱由甲厂生产, 3 箱由乙厂生产, 5 箱由丙厂生产。三厂产品的合格率分别为 85%、80%、90%。(1) 求任取一件产品是合格品的概率;
- (2) 从这 10 箱中任取一箱, 再从该箱中任取一件, 若此产品为合格品, 问此产品是由甲

厂生产的概率为多少?

解: 设事件  $A$  是“任取一件产品是合格品”, 事件  $B_1, B_2, B_3$  分别表示任取一产品是由甲厂、乙厂、丙厂生产的, 有已知题意可得

$$P(B_1)=0.2, P(B_2)=0.3, P(B_3)=0.5, \text{ 且}$$

$$P(A|B_1)=85\%, P(A|B_2)=80\%, P(A|B_3)=90\%,$$

- (1) 由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^3 P(A|B_i)P(B_i)$$

$$=85\% \times 0.2 + 80\% \times 0.3 + 90\%$$

$$\times 0.5 = 0.86$$

- (2) 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}$$

$$=\frac{85\% \times 0.2}{0.86} = \frac{17}{86} \approx 0.198$$

- 三. 设随机向量  $(X, Y)$  联合密度为  $f(x, y)=$

$$\begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

- (1) 求系数  $A$ ;
- (2) 判断  $X, Y$  是否独立, 并说

理由; (3)  $DX$ 。

解: (1) 由  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A e^{-(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y)} dx dy = A \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}y} dy \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{3}x} dx =$

$$= A \left( -\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \right) \Big|_0^{\infty} \left( -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}y} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{12}, \quad \text{可得 } A = 12.$$

(2) 因  $(X, Y)$  关于  $X$  和  $Y$  的边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0; \\ 0, & \text{其它;} \end{cases}$$

和

$$f_Y(y)$$

$$\begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0; \\ 0, & \text{其它;} \end{cases}$$

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ , 所以  $X$  与  $Y$  独立。

$$(3) DX = 1/9$$

四. 某保险公司多年统计资料表明, 在索赔户中, 被盜索赔户占 20%, 以  $x$  表示在随机抽查的 100 个索赔户中, 因被盜向保险公司索赔的户数。求被盜索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率近似值。

解: 由题意可知  $x \sim B(100, 0.2)$  为二项分布, 且  $E(X) = 20, D(X) = 16$

由中心极限定理可得

$$P(14 \leq X \leq 30) = P\left(\frac{14-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{30-20}{\sqrt{16}}\right)$$

$$\approx \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(2.5) + \Phi(1.5) - 1$$

$$\approx 0.9938 + 0.9332 - 1 = 0.927$$

五. 某岩石密度的测量误差  $X$  服从正态分布

$N(\mu, \sigma^2)$ , 取样本观测值 16 个, 得样本方差

$s^2 = 0.04$ , 试求  $\sigma^2$  的置信度为 95% 的置信区间。

(已知:  $\chi_{0.025}^2(16) = 28.845$ ,  $\chi_{0.975}^2(16) = 6.908$ ;  $\chi_{0.025}^2(15) = 27.488$ ,  $\chi_{0.975}^2(15) = 6.262$ )

解: 由于  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 所以

$\sigma^2$  的置信区间为:  $\left( \frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)} \right)$

$\sigma^2$  的置信度 0.95 的置信区间为:  $\left( \frac{15 \times 0.04}{27.488}, \frac{15 \times 0.04}{6.262} \right)$

即 (0.022, 0.096)

六. 设总体  $X$  的概率分布为  $P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}$ ,  $x=0,1$ 。求

(1) 矩估计值; (8 分) (2) 最大似然估计值。

(10 分)

解: (1)  $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$

$$(2) L = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$\ln L = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln p + \left( n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln (1-p)$$

$$\frac{d \ln L}{dp} = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{1}{p} - \left( n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{1}{1-p} = 0$$

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

## 2020-2021 第二学期 概率统计 A 卷参考答案

### 一. 填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 设 A、B、C 表示三个事件, 则“A、B、C 都发生”可以表示为 ABC

2. 设  $P(A) = 0.2, P(A \cup B) = 0.6$ , 若 A、B 互斥, 则  $P(B) =$  0.4

3. 将标号为 1, 2, 3, 4 的四个球随意地排成一行, 则第 1 号球排在最右边的概率为 0.25

4. 设连续型随机变量  $X \sim N(1, 4)$ , 则  $\frac{X-1}{2} \sim$   $N(0, 1)$

5. 设离散型随机变量 X 的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{3}, & -1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$  则  $P(X=2) =$  2/3

6. 设二维随机向量 (X, Y) 取数组 (0, 0), (-1, 1), (-1, 2), (1, 0) 的概率分别为  $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$ , 取其余数组的概率均为 0, 则  $\rho =$  8/3

7. 设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 其中  $X_1 \sim U[0, 6], X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim P(3)$ ,

记  $Y = X_1 - 2X_2 + 4X_3$ , 则  $D(Y) =$  67.

8. 已知总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , 又设  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  为来自总体的样本, 则  $\frac{2X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{X_4^2 + X_5^2} \sim$   $F(3, 2)$

9. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自总体 X 的样本, 若  $\hat{\mu} = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + cX_3$  是  $\mu = EX$  的一个无偏估计量, 则常数  $c =$  1/4

1/4

10. 总体 X 服从  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  未知,  $\sigma^2$  已知.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为其样本,  $(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  作为  $\mu$  的置信区间, 其置信水平为 0.9

二、仓库中有 10 箱同一规格的产品, 其中 2 箱由甲厂生产, 3 箱由乙厂生产, 5 箱由丙厂生产。三厂产品的合格率分别为 85%、80%、90%。从这 10 箱中任取一箱, 再从该箱中任取一件, (1) 求此产品的合格率; (7 分)

(2) 若此产品为合格品, 问此产品是由甲厂生产的概率为多少? (7 分)

解: 设事件 A = “任取一件产品是合格品”, 事件  $B_1, B_2, B_3$  分别表示任取一产品是由甲厂、乙厂、丙厂生产的, 有已知题意可得  $P(B_1) = 0.2, P(B_2) = 0.3, P(B_3) = 0.5$ , 且  $P(A|B_1) = 85\%$ ,  $P(A|B_2) = 80\%$ ,  $P(A|B_3) = 90\%$ ,

(1) 产品的合格率即  $P(A)$ , 由全概率公式可得

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A|B_i)P(B_i) = 85\% \times 0.2 + 80\% \times 0.3 + 90\% \times 0.5 = 0.86$$

(2) 即求  $P(B_1|A)$ , 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{85\% \times 0.2}{0.86} = \frac{17}{86} \approx 0.198$$

三、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k; (5 分) (2) 计算  $P\{1 < X \leq 3.5\}$ ; (5 分)

(3) 求  $E(X)$ . (5 分)

解: (1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  得  $k = \frac{1}{6}$ ;

$$(2) P\{1 < X \leq 3.5\} = \int_1^3 \frac{x}{6} dx + \int_3^{3.5} (2 - \frac{x}{2}) dx = \frac{41}{48};$$

$$(3) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{6} x^2 dx + \int_3^4 x(2 - \frac{x}{2}) dx = \frac{7}{3};$$

四、从装有 3 个红球, 1 个白球, 5 个黑球的罐中随机地抽取 2 个球, 设 X 和 Y 分别代表取到的红球数和白球数。求

(1) (X, Y) 的联合分布律; (5 分) (2) 关于 X 和 Y 的边缘分布律; (3 分)

(3)  $E(2X+Y)$ ; (4 分) (4) 判断 X 和 Y 的独立性. (4 分)

解: (1)、(2) 分布律如下

|        |   | Y     |       |      | P(Y=y) |
|--------|---|-------|-------|------|--------|
| X      |   | 0     | 1     | 2    |        |
| Y      | 0 | 10/66 | 15/66 | 3/66 | 14/33  |
|        | 1 | 20/66 | 11/66 | 0    | 16/33  |
|        | 2 | 6/66  | 0     | 0    | 1/11   |
| P(X=x) |   | 12/22 | 9/22  | 1/22 | 1      |

$$P(U_1|A) = \frac{P(A|U_1)P(U_1)}{P(A)} = \frac{0.85 \times 0.2}{0.86} = \frac{17}{86} \approx 0.198$$

三、设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 确定常数  $k$ ; (5 分) (2) 计算  $P\{1 < X \leq 3.5\}$ ;

(5 分)

(3) 求  $E(X)$ 。(5 分)

解: (1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  得  $k = \frac{1}{6}$ ;

$$(2) P\left\{1 < X \leq \frac{7}{2}\right\} = \int_1^{\frac{7}{2}} \frac{x}{6} dx + \int_{\frac{7}{2}}^3 \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{41}{48};$$

$$(3) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{6} x^2 dx + \int_3^4 x \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{3};$$

四、从装有 3 个红球, 1 个白球, 5 个黑球的罐中随机地抽取 2 个球, 设  $X$  和  $Y$  分别代表取到的红球数和白球数。求

(1)  $(X, Y)$  的联合分布律; (5 分) (2) 关于  $X$  和  $Y$  的边缘分布律; (3 分)

(3)  $E(2X+Y)$ ; (4 分) (4) 判断  $X$  和  $Y$  的独立性。(4 分)

解: (1)、(2) 分布律如下

| $Y \backslash X$ | 0     | 1     | 2    | $P_{i+j}$ |
|------------------|-------|-------|------|-----------|
| 0                | 10/66 | 15/66 | 3/66 | 14/33     |
| 1                | 20/66 | 12/66 | 0    | 16/33     |
| 2                | 6/66  | 0     | 0    | 1/11      |
| $P_{i+j}$        | 12/22 | 9/22  | 1/22 | 1         |

$$(3) E(2X+Y) = 5/3; \quad (4) P\{X=2, Y=1\} \neq P\{X=2\}P\{Y=1\}, \text{故 } X \text{ 与 } Y \text{ 不独立.}$$

五、某公司有 100 名员工参加一种资格证书考试, 按往年经验, 该考试通过率为 0.8, 用中心极限定理计算这 100 名员工至少有 30 人没通过考试的概率。(10 分)

(已知  $\Phi(2.5) = 0.9938$ )

解: 设 100 人中有  $X$  人没通过考试, 则  $X \sim B(100, 0.2)$

$$\begin{aligned} \text{从而 } P(X \geq 30) &= 1 - P(X < 30) \approx 1 - \Phi\left(\frac{30 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062. \end{aligned}$$

六、设总体  $X \sim \int(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  其中  $\theta > -1$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $X$  的一个样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是样本的一组观察值。求:

(1)  $\theta$  的矩估计量; (7 分) (2)  $\theta$  的最大似然估计量。(8 分)

$$\text{解: (1) } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1} dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

$$\text{又 } \bar{x} = E(X) = \frac{\theta+1}{\theta+2}, \text{ 故 } \hat{\theta} = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}, \text{ 所以 } \theta \text{ 的矩估计量 } \hat{\theta} = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}.$$

(2) 似然函数

$$L = L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} (\theta+1)^n \prod_{i=1}^n x_i^\theta & 0 < x_i < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

取对数

$$\ln L = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad (0 < x_i < 1, 1 \leq i \leq n),$$

$$\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0.$$

$$\text{所以 } \theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}.$$

## 《概率论与数理统计》课程试题

课程代码: 19221302

☒ 考试    ☐ A 卷    ☒ B 卷  
☐ 考查    ☐ C 卷    ☐ D 卷  
☐ E 卷    ☐ F 卷

☒ 闭卷    ☐ 开卷

| 题 号  | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 | 阅卷教师 |
|------|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|------|
| 各题分数 | 30 | 15 | 15 | 15 | 10 | 15 |   |   |   |   |    |      |
| 实得分数 |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |    |      |

一. 填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1、设 A、B 表示两个事件, 则 “A、B 都不发生” 可以表示为  $\bar{A}\bar{B}$

2、A、B 为两事件,  $P(A \cup B) = 0.8$ ,  $P(A) = 0.2$ ,  $P(\bar{B}) = 0.4$ , 则  $P(B - A) =$  0.6

3、口袋里有 3 个红球 4 个白球, 不放回取球, 则第 5 次取到的是白球概率为  $\frac{4}{7}$

4、设离散型随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{3}, & -1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$

则  $P\{X = -1\} =$   $\frac{1}{3}$

5、设随机变量  $X \sim N(0, 4)$ , 则  $P\{X \geq 0\} =$  0.5

6、已知当  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  时, 二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数  $F(x, y) = x^2 y^2$ , 记  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y)$ , 则  $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) =$   $\frac{1}{4}$

7、设  $X \sim P(3)$ , 则  $E(2X - 1) =$  5

8、设随机变量  $F \sim F(n_1, n_2)$ , 则  $\frac{1}{F} \sim$   $F(n_2, n_1)$

9、设  $X_1, X_2, X_3$  是来自指数分布总体  $X$  的一个简单随机样本,  $\frac{1}{8}X_1 - \frac{1}{4}X_2 - cX_3$  是未知

二、仓库中有 10 箱同一规格的产品，其中 2 箱由甲厂生产，3 箱由乙厂生产，5 箱由丙厂生产。三厂产品的合格率分别为 85%、80%、90%。

(1) 求这批产品的合格率；(7 分)

(2) 从这 10 箱中任取一箱，再从该箱中任取一件，若此产品为合格品，问此产品是由甲厂生产的概率为多少？(8 分)

解：设事件  $A$  = “任取一件产品是合格品”，事件  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  分别表示任取一产品是由甲厂、

乙厂、丙厂生产的，有题意可得  $P(B_1) = 0.2, P(B_2) = 0.3, P(B_3) = 0.5$ ，且

$P(A|B_1) = 85\%, P(A|B_2) = 80\%, P(A|B_3) = 90\%$ ，

$$(1) \quad P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A|B_i)P(B_i) = 85\% \times 0.2 + 80\% \times 0.3 + 90\% \times 0.5 = 0.86$$

(2) 即求  $P(B_1|A)$ ，由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{85\% \times 0.2}{0.86} = \frac{17}{86} \approx 0.198$$

三、已知离散型随机变量  $X$  的分布律为

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| $X$   | -1    | 0     | 1     |
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |

且已知  $E(X) = 0, D(X) = 0.5$ 。求：(1) 参数  $p_1, p_2, p_3$  的值；(5 分)

(2)  $X$  的分布函数  $F(x)$ ；(5 分) (3)  $P\{|X| > 0.5\}$  (5 分)

四、设  $(X, Y)$  的密度函数  $f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求 (1) 常数  $c$  : (5 分)

(2) 边缘密度  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$  : (5 分)

(3) 判断  $X$  与  $Y$  是否独立, 并说明理由. (5 分)

解: (1)  $\int_0^1 \int_0^x c \, dy = 1 \Rightarrow c = 2$

(2)  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dy$

$= \begin{cases} \int_0^x 2 \, dy = 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

同理

$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(3)  $\because f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$

$\therefore X$  与  $Y$  不独立

五、某小区进行绿化, 要移栽 100 棵某种树苗, 已知此种树苗移栽后成活率为 0.8。用中心极限定理计算这 100 棵中至少有 30 棵移栽没成活的概率。(10 分)

(已知  $\Phi(2.5) = 0.9938$ )

解: 设 100 棵树苗移栽后有  $X$  棵没成活, 则  $X \sim B(100, 0.2)$

从而  $P\{X \geq 30\} = 1 - P\{X < 30\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{30 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}\right)$

$= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$

这里  $\frac{30 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}$  是标准化的正态分布

六、设总体  $X$  的概率分布如右表所示,  $P_k = \frac{1}{\theta^2} \frac{2}{20(1-\theta)} \frac{3}{(1-\theta)^2}$

其中  $\theta$  为未知参数, 现抽到一个样本  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2$ , 求  $\theta$  的:

(1) 矩估计值: (7 分)

(2) 最大似然估计值: (8 分)

解: (1)  $E X = 3 - 2\theta, \bar{x} = \frac{5}{3}$

$\therefore 3 - 2\theta = \bar{x}$

解得  $\hat{\theta} = \frac{2}{3}$

(2)  $L(\theta) = \theta^2 \cdot 2\theta(1-\theta) \cdot 2\theta(1-\theta)$

$= 4\theta^3(1-\theta)^2$

$\ln L(\theta) = \ln 4 + 3 \ln \theta + 2 \ln(1-\theta)$

$\frac{1}{\theta} \frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0, \text{ 即 } \frac{3}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{5}$