

广东海洋大学 2023—2024 学年第一学期

《线性代数》课程试题参考答案

课程代码: 19221201x0

☒ 考试 ☒ A 卷 ☐ B 卷
☐ 考查 ☐ C 卷 ☐ D 卷
☒ 闭卷 ☐ 开卷 ☐ E 卷 ☐ F 卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷教师
各题分数	30	10	10	10	10	15	15	100	
实得分数									

一、填空题 ($3 \times 10 = 30$ 分)1. 6 级排列 325146 的逆序数是 5。2. 设 $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 若 $D = 0$, 则 $x = \underline{\pm 1}$ 。3. 已知三阶行列式 D 中第三行元素依次为 $-1, 0, 2$, 它们的余子式依次分别为 $5, 2, -1$, 则 $D = \underline{-7}$ 。4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{2023} = \underline{A}$ 。5. 设 A, B 均为四阶方阵, 且 $|A| = -2, |B| = 16$, 则 $|2AB^{-1}| = \underline{-2}$ 。6. 设 A 为 n 阶方阵, 其伴随矩阵为 A^* , 若 $|A^{-1}| = 11$, 则 A^{-1} 与 A^* 的关系为 $\underline{A^{-1} = 11A^*}$ 。7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, 则 A 的秩 $R(A) = \underline{3}$ 。8. 若向量组 α, β, γ 线性无关, 则向量组 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 线性无关。9. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 一定有解吗? 一定。10. n 元线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充要条件为 $\underline{R(A) = R(A, b) < n}$ 。

二、计算行列式 $D = \frac{1}{125} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ 的值。(10分)

$$\begin{aligned} \text{解: } \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 13 & 2 & 2 & 2 \\ 13 & 7 & 2 & 2 \\ 13 & 2 & 7 & 2 \\ 13 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 13 \times 125, \quad (8\text{分}) \quad \text{故 } D = 13. \quad (10\text{分}) \end{aligned}$$

三、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, 判断 A 是否可逆, 若可逆, 求 A^{-1} 。(10分)

$$\text{解: } \because |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆. } (2\text{分})$$

$$\text{又 } \because \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4\text{分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8\text{分})$$

$$\text{故 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10\text{分})$$

$$\text{注: 也可利用伴随矩阵法求, } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -6 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

四、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求 X 使得 $AX = B$ 。(10分)

解: $\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, 故 A 可逆, 由 $AX = B$ 可知 $X = A^{-1}B$. (3分)

$$\begin{aligned} \text{又} \because \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad (8\text{分}) \text{ 故 } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad (10\text{分}) \end{aligned}$$

注: 也可利用伴随矩阵法先求出 A^{-1} , 再求 X ,

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

五、若 $\alpha_1 = (7, 1, 8, -4)^T$, $\alpha_2 = (2, t, 3, -2)^T$, $\alpha_3 = (3, -1, 2, 0)^T$ 线性相关, 求 t 的值。(10分)

解: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则存在不全为0的数 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0. \quad (2\text{分})$$

$$\text{即: 齐次线性方程组} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + tx_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \text{ 存在非零解.} \quad (4\text{分})$$

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & t & -1 \\ 8 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 2-7t & 10 \\ 0 & 3-8t & 10 \\ 0 & 1-2t & 2 \end{pmatrix}, \quad (8\text{分})$$

又由 $R(A) < 3$ 可知, $2-7t=3-8t$ 得 $t=1$. (10分)

六、求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 3, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 1, -1, 3)^T$, $\alpha_3 = (5, -2, 8, -9)^T$, $\alpha_4 = (-1, 3, 1, 7)^T$ 的秩和一个极大线性无关组, 并把其余向量用该极大线性无关组线性表示。(15 分)

$$\begin{aligned} \text{解: } A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9\text{分}) \quad \text{故 } R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2. \quad (11\text{分}) \end{aligned}$$

一个极大线性无关组为: α_1, α_2 (13分)

$$\alpha_3 = \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{7}{2}\alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \quad (15\text{分})$$

七、求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \end{cases}$ 的通解。(15 分)

$$\begin{aligned} \text{解: } (A, b) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 6 & 23 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 3 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8\text{分}) \end{aligned}$$

$\because r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 5$, $\therefore$ 方程组有无穷多解

且有同解线性方程组 $\begin{cases} x_1 = -x_3/2 + 2x_5 - 9/2 \\ x_2 = -x_3/2 - x_4 - 3x_5 + 23/2 \end{cases}$, 其中 x_3, x_4, x_5 是自由变量,

分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得对应齐次线性方程组的基础解系:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12 \text{ 分})$$

取 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, 可得方程组的一个特解 $\eta^* = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14 \text{ 分})$

故原方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/2 \\ 23/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意实数. } (15 \text{ 分})$$