

广东海洋大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 I》课程试题

课程代码: 19221101x1



考试



A 卷



B 卷



考查



C 卷



D 卷

☒ 闭卷☐ 开卷☐ E 卷

F 卷

题 号	一	二	三	四	五	总分	阅卷教师
各题分数	24	15	36	18	7	100	
实得分数							

一. 填空题. (每小题 3 分, 共 24 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} x^2(1+2x) = \frac{28}{27}$

2. 函数 $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ 的可去间断点是 $x = 1$

3. 设 $f(x) = \sin 2x$, 则 $f'''(0) = -8$

4. 曲线 $y = x \ln(e+x)$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程是 $y = x$

5. 设 $y = 2x^3 - 3x + 1$, 则当 $x = \frac{1}{3}$, $dx = 0.01$ 时, $dy = -\frac{7}{300}$

6. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

7. 函数 $y = x^3 - 3x - 1$ 在 $[0,2]$ 上的驻点是 $x=1$

8. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

二. 选择题. (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 下列函数, $x \rightarrow 0$ 时是无穷小量的是 ___ B ___

A. $x + \sin \frac{1}{x}$

B. $x \sin \frac{1}{x}$

C. $\ln(2+x)$

D. $\ln(1-\cos x)$

2. $x \rightarrow 0$ 时, 与 x 等价的无穷小量是___C___

A. $\frac{\sin 2x}{x}$

B. $\ln(1+3x)$

C. $e^x - 1$

D. $\cos x - 1$

3. 下列命题错误的是___B___

A. $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 连续.

B. $f'(x_0)=0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极值.

C. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

D. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\int_a^x f(t)dt$ 在 (a,b) 内可导.

4. 下列计算错误的是___C___

A. $(e^{-x})' = -e^{-x}$

B. $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$

C. $(\ln(1+2x))' = \frac{1}{1+2x}$

D. $\left(\int_0^{2x} t^2 dt\right)' = 8x^2$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x \sin x} =$ ___A___

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. ∞

D. 0

三.计算题. (每小题 6 分, 共 36 分)

1. 设 $y = (\ln x + \sqrt{x})^2$, 求 dy .

$$dy = 2(\ln x + \sqrt{x}) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$$

2. 求由方程 $xye^{x+y} + 2x - 1 = 0$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

$$(y + xy')e^{x+y} + xye^{x+y}(1 + y') + 2 = 0$$

$$y' = -\frac{y(x+1)e^{x+y} + 2}{x(y+1)e^{x+y}}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \int x\sqrt{1+2x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \sqrt{1+2x^2} d(1+2x^2) \\ &= \frac{1}{6} (1+2x^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \int x \sin 6x dx \\ &= -\frac{1}{6} x \cos 6x + \int \frac{1}{6} \cos 6x dx \\ &= -\frac{1}{6} x \cos 6x + \frac{1}{36} \sin 6x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= 0 + 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \left[2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 \\ &= 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{x^3}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} \end{aligned}$$

四. 应用题. (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 求函数 $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 1}$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值和最小值.

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x^2 + x + 1}, y' = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2},$$

令 $y' = 0$, 得 $x_1 = -\frac{1}{2}$. 函数在 $[0, 1]$ 上无驻点.

$$f(0) = 4, f(1) = \frac{10}{3} \quad \text{最大值 } f(0) = 4, \text{最小值 } f(1) = \frac{10}{3}.$$

2. 求曲线 $y = \ln(x^2 + 5)$ 的凹凸区间和拐点.

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 5}, y'' = \frac{10 - 2x^2}{(x^2 + 5)^2} \quad \text{令 } y'' = 0 \text{ 得 } x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = \sqrt{5}$$

当 $-\infty < x < -\sqrt{5}$ 时, $y'' < 0$, 即曲线在 $(-\infty, -\sqrt{5})$ 内是凸的.

当 $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ 时, $y'' > 0$ 即曲线在 $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ 内是凹的.

当 $\sqrt{5} < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 即曲线在 $(\sqrt{5}, +\infty)$ 内是凸的.

拐点为 $(-\sqrt{5}, \ln 10), (\sqrt{5}, \ln 10)$

3. 求曲线 $y = \cos x \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ 与两坐标轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得

旋转体体积

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \pi^2$$

五. 证明题(7 分) 证明 $x > 0$ 时, $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

$x > 0$, 令 $f(t) = \cos t - 1 + \frac{1}{2}t^2$, $t \in [0, x]$

$$t \in (0, x) \text{ 时, } f'(t) = -\sin t + t > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 单调增加,

$$x > 0, f(x) > f(0) = 0 \quad \text{, 得证.}$$