

广东海洋大学 2020—2021 学年第一学期

《高等数学 I》课程试题

课程代码: 19221101x1



考试



A 卷



B 卷



考查



C 卷



D 卷

☒ 闭卷☐ 开卷☐ E 卷

F 卷

题 号	一	二	三	四	五	六	总分	阅卷教师
各题分数	24	12	18	24	16	6	100	
实得分数								

一. 填空题. (每小题 3 分, 共 24 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{1+x} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x+a, & \text{当 } x \geq 1 \\ 2, & \text{当 } x < 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 则常数 $a=1$.

4. 设 $f(x) = e^{2x}$, 则 $f'''(0) = 8$

5. 设 $y = x^3 - x + 1$, 则当 $x = \frac{1}{2}$, $dx = 0.1$ 时, $dy = -0.025$

6. 曲线 $y = x \cos x$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程是 $y = x$.

7. 函数 $y = x^3 - 1$ 在 $[-1,2]$ 上的最小值是 -2

8. $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$.

二. 计算下列极限. (每小题 6 分, 共 12 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

3

班级:

姓名:

学号:

试题共 9 页
加白纸 2 张

密

封

线

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \quad 3$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} \quad 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \quad 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1 \quad 2$$

三. 计算下列导数或微分. (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 设 $y = (x + \sqrt{x})^3$, 求 dy .

$$dy = 3(x + \sqrt{x})^2 d(x + \sqrt{x}) \quad 3$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x}} (x + \sqrt{x})^2 (1 + 2\sqrt{x}) dx \quad 3$$

2. 求由方程 $ye^{xy} + 3x - 2 = 0$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

方程两边对 x 求导,

$$y'e^{xy} + ye^{xy}(y + xy') + 3 = 0 \quad 4$$

$$y' = -\frac{3 + y^2 e^{xy}}{e^{xy}(1 + xy)} \quad 2$$

3. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{cases}$ 所表示的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{(1+t)^2}}{-\frac{2t}{(1+t^2)^2}} = -\frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)^2} \quad 6$$

四. 计算下列积分. (每小题 6 分, 共 24 分)

1. $\int x\sqrt{3+x^2} dx$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{2} \sqrt{3+x^2} d(3+x^2) & 3 \\ &= \frac{1}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C & 3 \end{aligned}$$

2. $\int x e^{-3x} dx$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \int \frac{1}{3} e^{-3x} dx & 3 \\ &= -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C & 3 \end{aligned}$$

3. $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 0 + \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & 3 \\ &= \arcsin x \Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3} & 3 \end{aligned}$$

4. $\int_{\frac{1}{2}}^e x^3 \ln x dx$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^e - \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^e x^3 dx & 4 \\ &= \frac{1}{4} e^4 + \frac{1}{64} \ln 2 - \frac{1}{16} x^4 \Big|_{\frac{1}{2}}^e = \frac{3}{16} e^4 + \frac{1}{64} \ln 2 + \frac{1}{256} & 2 \end{aligned}$$

五. 应用题. (共 16 分)

1. 求函数 $f(x) = \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 - x + 1}$ 的极值. (6分)

$$y = f(x) = 2 + \frac{x}{x^2 - x + 1}, y' = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2 - x + 1)^2},$$

令 $y' = 0$ ，得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 1$. 3

$x < -1$ 时 $y' < 0$ ， $-1 < x < 1$ 时 $y' > 0$

所以函数在 $x = -1$ 取得极小值 $f(-1) = \frac{5}{3}$

$-1 < x < 1$ 时 $y' > 0$ ， $x > 1$ 时 $y' < 0$

所以函数在 $x = 1$ 取得极大值 $f(1) = 3$ 3

2. 求曲线 $y = \ln(x^2 + 2)$ 的凹凸区间和拐点. (6分)

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 2}, y'' = \frac{4 - 2x^2}{(x^2 + 2)^2} \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2} \quad 2$$

当 $-\infty < x < -\sqrt{2}$ 时， $y'' < 0$ ，即曲线在 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 内是凸的.

当 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时， $y'' > 0$ 即曲线在 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 内是凹的.

当 $\sqrt{2} < x < +\infty$ 时， $y'' < 0$ ，即曲线在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 内是凸的. 2

拐点为 $(-\sqrt{2}, \ln 4), (\sqrt{2}, \ln 4)$ 2

3. 求曲线 $y = x^3, y = 0, x = \frac{2}{3}$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 (4分)

$$V = \int_0^{\frac{2}{3}} \pi (x^3)^2 dx = \frac{1}{7} \pi \left(\frac{2}{3} \right)^7 \quad 4$$

六.证明题. (6分) 证明 $x > 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x$

证明: 令 $f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3}x$,

$$x > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1+x}} - \frac{1}{3} < 0 \quad 3$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调减少,

$x > 0$ 时, $f(x) < f(0) = 0$ 3 原式得证.