

广东海洋大学 2019—2020 学年第一学期

《高等数学 I》课程试题

课程代码: 19221101x1



考试



A 卷



B 卷



考查



C 卷



D 卷

☒ 闭卷☐ 开卷☐ E 卷

F 卷

题 号	一	二	三	四	五	六	总分	阅卷教师
各题分数	24	12	18	24	16	6	100	
实得分数								

一. 填空题. (每小题 3 分, 共 24 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x+x^2} = \underline{1}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \underline{e^{-2}}$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{当 } x \geq 1 \\ bx, & \text{当 } x < 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导, 则常数 $a = \underline{1}$, $b = \underline{2}$.

4. 设 $f(x) = (x+1)^{12}$, 则 $f'''(0) = \underline{1320}$.

5. 设 $y = \ln(1+x)$, 则当 $x=0, dx=0.1$ 时, $dy = \underline{0.1}$.

6. 曲线 $y = x \ln x$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程是 $\underline{y = x - 1}$.

7. 函数 $y = x^3 - ax + 1$ 在 $x=1$ 处有极值, 则 $a = \underline{3}$.

8. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{-\frac{\pi}{4}}$.

二. 计算下列极限. (每小题 6 分, 共 12 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad 3$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \quad 3$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \quad 4$$

三. 计算下列导数或微分. (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 设 $y = (1 + \sqrt{x})^5$, 求 dy .

$$dy = 5(1 + \sqrt{x})^4 d(1 + \sqrt{x}) = \frac{5}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})^4 dx \quad 3$$

2. 求由方程 $y \cos xy + 2x - 1 = 0$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

方程两边对 x 求导,

$$y' \cos xy - y(y + xy') \sin xy + 2 = 0 \quad 4$$

$$y' = \frac{y^2 \sin xy - 2}{\cos xy - xy \sin xy} \quad 2$$

3. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ 所表示的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{-\frac{1}{(1+t)^2}} = -\frac{2(1+t)^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \quad 6$$

四. 计算下列积分. (每小题 6 分, 共 24 分)

1. $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

原式 = $\int -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} d(1-x^2)$ 3

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ 3

2. $\int x \sin 3x dx$

原式 = $-\frac{1}{3}x \cos 3x + \int \frac{1}{3} \cos 3x dx$ 3

$= -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$ 3

3. $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

原式 = $0 - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 3

$= -\arcsin x \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\pi}{2}$ 3

4. $\int_1^{e^2} x^2 \ln x dx$

原式 = $\left[\frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_1^{e^2} - \frac{1}{3} \int_1^{e^2} x^2 dx$ 4

$= \frac{2}{3} e^6 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^{e^2} = \frac{5}{9} e^6 + \frac{1}{9}$ 2

五. 应用题. (共 16 分)

1. 求函数 $f(x) = \frac{2x^2+3x+3}{x^2+x+1}$ 在 $[-3,1]$ 上的最大值和最小值. (6分)

$f(x) = 2 + \frac{x+1}{x^2+x+1}, y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2},$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = -2, x_2 = 0$. 2

$$f(-3) = \frac{12}{7}, f(-2) = \frac{5}{3}, f(0) = 3, f(1) = \frac{8}{3} \quad 2$$

最大值 $f(0) = 3$, 最小值 $f(-2) = \frac{5}{3}$. 2

2. 求曲线 $y = xe^{-x}$ 的凹凸区间和拐点. (6分)

$$y' = (1-x)e^{-x}, y'' = (x-2)e^{-x}$$

令 $y'' = 0$ 得 $x=2$ 2

当 $-\infty < x < 2$ 时, $y'' < 0$, 即曲线在 $(-\infty, 2)$ 内是凸的.

当 $x > 2$ 时, $y'' > 0$ 即在 $[2, +\infty)$ 内曲线是凹的. 2

拐点为 $(2, 2e^{-2})$ 2

3. 求曲线 $y = 2x, y = 0, x = 1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 (4分)

$$V = \int_0^1 \pi (2x)^2 dx = \frac{4}{3}\pi \quad 6$$

六. 证明题. (6 分)

证明: 令 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1 - \frac{1}{2}x$,

$$x > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} < 0 \quad 3$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调减少,

$$x > 0 \text{ 时, } f(x) < f(0) = 0 \quad 3$$

原式得证.