

广东海洋大学 2018—2019 学年第一学期

《 高等数学 I 》课程试题答案

课程代码: 19221101x1



考试



A 卷



B 卷



考查



C 卷



D 卷

☒ 闭卷☐ 开卷☐ E 卷

F 卷

题 号	一	二	三	四	五	六	总分	阅卷教师
各题分数	24	12	18	24	16	6	100	
实得分数								

一. 填空题. (每小题 3 分, 共 24 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(2x-1)(3x-2)(4x-3)} = \underline{\underline{\frac{1}{24}}};$$

$$2. \text{设 } f(x) = \begin{cases} a + \sin x, & x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases} \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续, 则常数 } \underline{\underline{1}};$$

$$3. \text{设 } f(x) = e^{-x}, \text{ 则 } f^{(7)}(0) = \underline{\underline{-1}};$$

$$4. \text{设函数 } y = x^2, \text{ 则当 } x = 2, dx = 0.02 \text{ 时, } dy = \underline{\underline{0.08}};$$

$$5. \text{曲线 } y = x \cos x \text{ 在点 } (0, 0) \text{ 处的切线方程是 } \underline{\underline{y = x}};$$

$$6. \text{函数 } y = x^4 - 2x \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上的最大值为 } \underline{\underline{0}};$$

$$7. \int_{-1}^1 \frac{1 + \sin x}{1 + x^2} dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}};$$

$$8. \text{曲线 } y = x^2, y = 0, x = 1 \text{ 所围图形的面积是 } \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

二. 计算下列极限. (每小题 6 分, 共 12 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2 \sin x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{2}{x^2}}$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \right]^{\frac{2 \sin^2 x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{3x^2 \cos^2 x}$$

$$= e^2 \quad (6 \text{ 分})$$

$$= -\frac{1}{3} \quad (3 \text{ 分})$$

三. 计算下列导数或微分. (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 设 $y = \sin(1 + \ln x)$, 求 dy .

$$\text{解: } dy = \cos(1 + \ln x) \left(\frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{x} \cos(1 + \ln x) dx$$

2. 求由方程 $ye^{xy} + x - 1 = 0$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解: 方程两边对 x 求导, 得:

$$e^{xy} \frac{dy}{dx} + ye^{xy} (y + x \frac{dy}{dx}) + 1 = 0 \quad (4 \text{ 分})$$

$$y' = -\frac{1 + y^2 e^{xy}}{(1 + xy)e^{xy}} \quad (2 \text{ 分})$$

3. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t} \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ 所表示的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{-\frac{1}{(1+t)^2}} = -\frac{2t(1+t)^2}{1+t^2} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\left(-\frac{2t(1+t)^2}{1+t^2}\right)'}{\left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right)'} = \frac{-\frac{2(t^3-t^2+3t+1)(1+t)}{(1+t^2)^2}}{-\frac{1}{(1+t)^2}} \\ &= \frac{2(t^3-t^2+3t+1)(1+t)^3}{(1+t^2)^2} \quad (3 \text{ 分}) \end{aligned}$$

四. 计算下列积分. (每小题 6 分, 共 24 分)

1. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\text{解: } \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c \quad (3 \text{ 分})$$

2. $\int x \cos 2x dx$

$$\int x \cos 2x dx = \int x d\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (3 \text{ 分})$$

$$3. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$$

解：令 $t = 1 - x$, 则 $x = 1 - t, dx = -dt$, 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $t = \frac{3}{2}$; $x = \frac{1}{2}$ 时, $t = \frac{1}{2}$;

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \left(-\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{6} - \frac{5}{6} \sqrt{2} \quad (2 \text{ 分})$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{解: } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2} \quad (3 \text{ 分})$$

五. 应用题. (共 16 分)

1. 求函数 $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ 的单调区间与极值. (6 分)

$$\text{解: } y = 3 + \frac{x+1}{x^2+x+1}, y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

令 $y' = 0$, 得驻点: $x_1 = -2, x_2 = 0$. (2 分)

$$y'' = \frac{(-2x-2)(x^2+x+1) + 2(2x+1)(x^2+2x)}{(x^2+x+1)^3}, \quad y''|_{x_1=-2} > 0, y''|_{x_2=0} < 0 \quad (2 \text{ 分})$$

故极大值为 $y(0) = 4$, 极小值为 $y(-2) = \frac{8}{3}$ (2 分)

2. 求曲线 $y = \ln(x^2 + 1)$ 的凹凸区间和拐点. (6 分)

$$\text{解: } y' = \frac{2x}{1+x^2}, y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

令 $y''=0$ ，得 $x_1=-1, x_2=1$ (2 分)

当 $-1 < x < 1$ 时， $y'' > 0$ ，即曲线在 $[-1, 1]$ 内是凹的.

当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时， $y'' < 0$ ，即曲线在 $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ 内是凸的. (2 分)

因此，拐点为 $(-1, \ln 2), (1, \ln 2)$. (2 分)

3. 曲线 $y = \ln x, y = 0, x = 2$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积. (4 分)

解： $V = \int_1^2 \pi (\ln x)^2 dx = 2\pi \ln^2 2 - 4\pi \ln 2 + 2\pi$

六. 证明题. (6 分)

证明：方程 $x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实根.

证明：设 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 1, x \in [\frac{1}{2}, 1]$

则， $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续 且 $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{16} < 0, f(1) = 3 > 0$

由零点定理可知， $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内至少有一零点. (3 分)

又 $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 > 0, x \in [\frac{1}{2}, 1]$

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内的零点唯一.

即方程 $x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实根. (3 分)