向量的运算

设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$， $\vec{b}=(x_2,y_2)$。

加法

向量的加法满足平行四边形法则和三角形法则，

$$\vec{OB}+\vec{OA}=\vec{OC}$$

。

$$let\begin{cases} a=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} \\ b=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$a+b=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\y_1 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

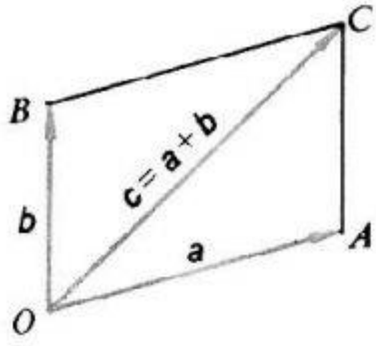

图 4　向量的加法

$$a+0=0+a=a$$

向量加法的运算律：
交换律：a+b=b+a；
结合律：(a+b)+c=a+(b+c)。

减法

如果 a、b 是互为相反的向量，那么 a=-b，b=-a，a+b=0. 0 的反向量为 0
OA-OB=BA.即“共同起点，指向被减”
a=(x_1,y_1)，**b**=(x_2,y_2) ，则 **a-b**=(x_1-x_2,y_1-y_2).
如图：**c=a-b** 以 **b** 的结束为起点，**a** 的结束为终点。
加减变换律：**a+(-b)=a-b**

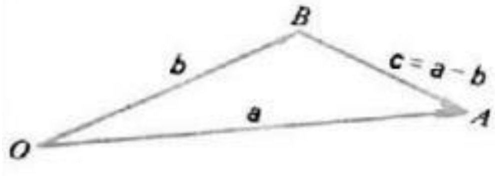

图 5　向量的减法

数乘

实数 λ 和向量 a 的叉乘乘积是一个向量，记作 λa，且|λa|=|λ|*|a|。 [1]
当 λ>0 时，λa 的方向与 a 的方向相同；当 λ<0 时，λa 的方向与 a 的方向相反；当 λ=0 时，λa=0，方向任意。当 a=0 时，对于任意实数 λ，都有 λa=0。 [1]
注：按定义知，如果 λa=0，那么 λ=0 或 a=0。
实数 λ 叫做向量 a 的系数，乘数向量 λa 的几何意义就是将表示向量 a 的有向线段伸长或压缩。

当 $|\lambda|>1$ 时，表示向量 a 的有向线段在原方向（$\lambda>0$）或反方向（$\lambda<0$）上伸长为原来的 $|\lambda|$ 倍
当 $|\lambda|<1$ 时，表示向量 a 的有向线段在原方向（$\lambda>0$）或反方向（$\lambda<0$）上缩短为原来的 $|\lambda|$ 倍。
实数 p 和向量 a 的点乘乘积是一个数。
数与向量的乘法满足下面的运算律
结合律：$(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)=(a\cdot\lambda b)$。
向量对于数的分配律（第一分配律）：$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$.
数对于向量的分配律（第二分配律）：$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$.
数乘向量的消去律：① 如果实数 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda a=\lambda b$，那么 $a=b$。② 如果 $a\neq0$ 且 $\lambda a=\mu a$，那么 $\lambda=\mu$。
需要注意的是：向量的加减乘（向量没有除法）运算满足实数加减乘运算法则。

数量积

定义：已知两个非零向量 a,b，作 OA=a,OB=b，则∠AOB 称作向量 a 和向量 b 的夹角，记作 θ 并规定 $0\leq\theta\leq\pi$
定义：两个向量的数量积（内积、点积）是一个数量（没有方向），记作 $a\cdot b$。
若 a、b 不共线，则

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=|a|\bullet|b|\bullet\cos\theta$$

；若 a、b 共线，则

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\pm|a|\bullet|b|$$

。 [1]
向量的数量积的坐标表示：$a\cdot b=x\cdot x'+y\cdot y'$。
向量的数量积的运算律
$a\cdot b=b\cdot a$（交换律）
$(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)$(关于数乘法的结合律)
（$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$（分配律）
向量的数量积的性质
$a\cdot a=|a|$的平方。
$a\perp b$〈=〉$a\cdot b=0$。
$|a\cdot b|\leq|a|\cdot|b|$。（该公式证明如下：$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\cdot|\cos\alpha|$ 因为 $0\leq|\cos\alpha|\leq1$，所以 $|a\cdot b|\leq|a|\cdot|b|$）
向量的数量积与实数运算的主要不同点
1．向量的数量积不满足结合律，即：$(a\cdot b)\cdot c\neq a\cdot(b\cdot c)$；例如：$(a\cdot b)^2\neq a^2\cdot b^2$。
2．向量的数量积不满足消去律，即：由 $a\cdot b=a\cdot c(a\neq0)$，推不出 $b=c$。
3．$|a\cdot b|$与$|a|\cdot|b|$不等价
4．由 $|a|=|b|$ ，不能推出 $a=b$，也不能推出 $a=-b$，但反过来则成立。

向量积

$$a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$a\times b=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\a_3 & 0 & -a_1\\-a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_n\end{bmatrix}$$

定义：两个向量 a 和 b 的向量积

（外积、叉积）是一个向量，记作 a×b（这里“×”并不是乘号，只是一种表示方法，与“·”不同，也可记做“∧”）。若 a、b 不共线，则 a×b 的模是：︱a×b︱=|a|·|b|·sin〈a，b〉；a×b 的方向是：垂直于 a 和 b，且 a、b 和 a×b 按这个次序构成右手系。若 a、b 垂直，则︱a×b︱=|a|*|b|（此处与数量积不同，请注意），若 a×b=0，则 a、b 平行。向量积即两个不共线非零向量所在平面的一组法向量。

运算法则：运用三阶行列式

设 a,b,c 分别为沿 x,y,z 轴的单位向量

A=(x1,y1,z1)，B=（x2,y2,z2），则

$$A*B=\begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\end{bmatrix}$$

向量的向量积性质：

|a×b|是以 a 和 b 为边的平行四边形面积。

a×a=0。

a 平行 b〈=〉a×b=0

向量的向量积运算律

a×b=-b×a

(λa)×b=λ(a×b)=a×(λb)

a×(b+c)=a×b+a×c.

(a+b)×c=a×c+b×c.

上两个分配律分别称为左分配律和右分配律。在演算中应注意不能交换“×”号两侧向量的次序。

注：向量没有除法，“向量 AB/向量 CD”是没有意义的。

三向量混合积

定义：给定空间三向量 a、b、c，向量 a、b 的向量积 a×b，再和向量 c 作数量积(a×b)·c，所得的数叫做三向量 a、b、c 的混合积，记作(a,b,c)或(abc)，即(abc)=(a,b,c)=(a×b)·c

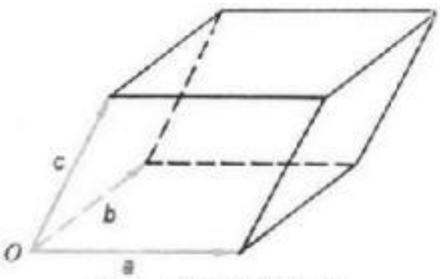

图 7　向量的混合积

混合积具有下列性质：

1．三个不共面向量 a、b、c 的混合积的绝对值等于以 a、b、c 为棱的平行六面体的体积 V，并且当 a、b、c 构成右手系时混合积是正数；当 a、b、c 构成左手系时，混合积是负数，即(abc)=εV（当 a、b、c 构成右手系时 ε=1；当 a、b、c 构成左手系时 ε=-1）

2．上性质的推论：三向量 a、b、c 共面的充要条件是(abc)=0

3．(abc)=(bca)=(cab)=-(bac)=-(cba)=-(acb)

双重向量积

给定空间的三个向量 a,b,c,如果先做其中两个向量 a,b 的向量积 a×b，再做所得向量与第三向量的向量积，那么最后的结果仍然是一个向量，叫做所给三向量的双重向量积，记做：(a×b)×c。

性质：

(a×b)×c=(a·c)·b-(b·c)·a

a×(b×c)=-(b×c)×a=(a·c)·b-(a·b)·c

关系式

给定空间内四个向量 a、b、c、d，则这四个向量之间满足如下关系：

$$(a\times b)\bullet(c\times d)=(a\bullet c)(b\bullet d)-(a\bullet d)(b\bullet c)$$

证明：

由混合积的性质可知

$$(a\times b)\bullet(c\times d)=a\bullet(b\times(c\times d))$$

（即把 c×d 看成一个新的向量 e，利用性质(a×b)·e=a·(b×e)）

再根据二重向量积的性质可知

$$a\bullet(b\times(c\times d))=a\bullet((b\bullet d)c-(b\bullet c)d)=(a\bullet c)(b\bullet d)-(a\bullet d)(b\bullet c)$$

该公式可用于证明三维的柯西不等式

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

证明：令公式中 a=c、b=d，则：

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=(\vec{a}\bullet\vec{a})\left(\vec{b}\bullet\vec{b}\right)-\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\left(\vec{b}\bullet\vec{a}\right)$$

设

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

，那么：

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\geq 0$$

即

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

等号成立的条件是

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

，即 a、b 共线（

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k$$

或 b=0）